

Die Wege zu Fermats letztem Satz erreichen verschiedene Exponenten, und Abstieg und Kummer verfehlen zusammen 92 Exponenten bis 1000

— zusammen verfehlen die beiden noch **92** Exponenten bis **1000** (der kleinste ist **37**) — nur der Weg von Wiles
erreichte sie alle — [Aufsatz 642]

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan

September 2026

— *From thinking to syncing.* —

Zusammenfassung

Für $n \geq 3$ hat $x^n + y^n = z^n$ keine Lösung in teilerfremden positiven ganzen Zahlen (Fermats letzter Satz, bewiesen von Wiles 1995). Dieser Aufsatz beweist nichts; er legt die Wege dar, die dieses „keine Lösung“ erreichen, und zählt, welche Exponenten jeder erreicht. Es wird kein neuer Satz und kein neues Gesetz beansprucht.

Erstens, der Weg des unendlichen Abstiegs erreicht $n = 4$ — $x^4 + y^4 = z^2$ hat keine Lösung bis 3000, während dieselbe Suche 534 teilerfremde Lösungen von $x^2 + y^2 = z^2$ fand. Ist der Exponent durch 4 teilbar, genügt dieser Weg (Abschnitt 3).

Zweitens, Kummers Weg erreicht die regulären Primzahlen — ist eine Primzahl p regulär (p teilt keinen der Zähler der Bernoulli-Zahlen $B_2, \dots, B_{p-3}$), so gibt es keine Lösung mit dem Exponenten p . Von den 167 Primzahlen von 3 bis unter 1000 sind 103 regulär (ein Anteil von 0.616766), und die einzigen irregulären unter 100 sind 37, 59 und 67 (Abschnitt 4).

Drittens, und das ist der Kern. Selbst zusammen lassen die beiden Wege Exponenten unerreicht — Exponenten, die nicht durch 4 teilbar sind und keinen regulären ungeraden Primfaktor haben, gibt es 92 bis 1000, der kleinste ist 37. Jedes Werkzeug erreicht einen anderen Bereich von Exponenten, und nur der Weg von Wiles erreichte sie alle (Abschnitt 5).

Viertens, der Weg über die ABC-Vermutung erreicht große Exponenten (bedingt) — ein Gegenbeispiel hätte eine Qualität $\log z^n / \log \text{rad}(xyz)$ über $n/3$. Für $n \geq 5$ übersteigt das $5/3$, mehr als das bekannte höchste, 1.629912, das in Aufsatz 641 geprüft wurde. Keines der 1268 Tripel mit $c < 10^6$ hat $q > 5/3$. Tripel, die die unteren Schranken 1 und $4/3$ für $n = 3$ und 4 übersteigen, gibt es jedoch (Abschnitt 6).

Fünftens, in der Welt der Polynome braucht es eine Zeile, und Beinahe-Treffer sind keine Lösungen — eine erschöpfende Suche über Polynome mit kleinen Koeffizienten fand 20 Paare für $n = 2$ und keines für $n = 3$ oder 4 (eine Folge von Mason–Stothers). Unter den ganzen Zahlen gibt es 18 Tripel bis 2000, die um eins verfehlen, etwa $9^3 + 10^3 = 12^3 + 1$, aber keines, das genau passt (Abschnitte 2 und 7).

Schlüsselwörter: Fermats letzter Satz, unendlicher Abstieg, reguläre Primzahlen, Bernoulli-Zahlen, Kummer.

Tragweite (scope note): Es wird kein neuer Satz und kein neues Gesetz beansprucht——der letzte Satz und sein Beweis (Wiles sowie Taylor und Wiles, 1995), der unendliche Abstieg für $n = 4$ (Fermat), Kummers Satz über reguläre Primzahlen (um 1850), die Liste der irregulären Primzahlen, die Vermutung, dass der Anteil regulärer Primzahlen nahe $e^{-1/2}$ liegt (Siegel), und dass die ABC-Vermutung große Exponenten ausschließt (die Darstellung von Granville und Tucker und anderen) sind alle bekannt. Der letzte Satz wird nicht bewiesen——der Weg von Wiles (die Frey-Kurve und die Modularität) lässt sich nicht in Zahlen verfolgen, also wird nur seine Adresse geschrieben. Er wird nicht „verschiedene Wurzeln“ genannt——was hier trennt, ist nicht die Quelle eines Phänomens, sondern das Werkzeug des Beweises, also wird es „verschiedene Wege“ genannt. Gleichnamige Sätze werden auseinandergehalten——Fermats Test (der kleine Satz) in Aufsatz 603 und Kummers Satz über Überträge in Aufsatz 608 sind andere Sätze als der Fermat und der Kummer dieses Aufsatzes. Beziehung zu früheren Aufsätzen: Aufsatz 641 zählte, dass die ABC-Vermutung für Polynome ein Satz und für ganze Zahlen eine Vermutung ist, und stellte Fermat für Polynome als einzeilige Folge hin——dieser Aufsatz stellt diesen Weg der Polynome und den Weg über ABC in einen Namensaufruf der Wege zum ganzzahligen letzten Satz. Aufsatz 31 gab dem π der Reihe von Ramanujan die Adresse einer Periode von Modulformen——auch der Weg von Wiles führt über Modulformen. Hinzugefügt wird, die Regularität bis 1000 auf zwei Wegen zu entscheiden, die Exponenten zu zählen, die weder der Abstieg noch Kummer erreicht, die untere Schranke $n/3$ für die Qualität eines Gegenbeispiels mit bekannten Tripeln abzugleichen, und den Separator auf den Bereich der Exponenten zu legen, den jedes Werkzeug erreicht.

1. Bezeichnungen und Frage

Der letzte Satz: für $n \geq 3$ hat $x^n + y^n = z^n$ keine Lösung in teilerfremden positiven ganzen Zahlen. Für einen Teiler d von n liefert eine Lösung von $x^n + y^n = z^n$ eine Lösung von $(x^{n/d})^d + (y^{n/d})^d = (z^{n/d})^d$. Jedes $n \geq 3$ ist durch 4 oder durch eine ungerade Primzahl teilbar, also genügt es zu zeigen, dass es für $n = 4$ und für ungerade Primzahlen p keine Lösung gibt.

Frage: welche Werkzeuge erreichen dieses „keine Lösung“, und bis zu welchen Exponenten?

2. Die Welt der Polynome

Rechnung 2.1: aus den 124 Polynomen vom Grad höchstens 2 mit ganzzahligen Koeffizienten von -2 bis 2 wurden teilerfremde nichtkonstante Paare $x(t), y(t)$ gewählt, und es wurden diejenigen gesucht, für die $x^n + y^n$ die n -te Potenz eines Polynoms ist (eingengt durch die Werte bei $t = 2$ bis 8 und durch Faktorisierung bestätigt). Für $n = 2$ wurden 20 Paare gefunden (darunter $(2t)^2 + (t^2 - 1)^2 = (t^2 + 1)^2$); für $n = 3$ und 4 keine.

Beobachtung 2.2: in der Welt der Polynome wird jedes $n \geq 3$ in einer Zeile erreicht. Wendet man den Satz von Mason–Stothers aus Aufsatz 641 an, mit D dem größten Grad, so ergibt sich $nD \leq 3D - 1$, also $n < 3$ ——doch das

ist der letzte Satz für Polynome, kein Weg zum letzten Satz für ganze Zahlen. Den ganzen Zahlen fehlt die Ableitung, die sein Beweis benutzt.

3. Der Weg des unendlichen Abstiegs (n = 4)

Rechnung 3.1: die Suche in $1 \leq x \leq y \leq 3000$ nach einer ganzen Zahl z mit $x^4 + y^4 = z^2$ fand keine. Dieselbe Suche fand 534 teilerfremde Lösungen von $x^2 + y^2 = z^2$ (eine positive Kontrolle, dass die Suche funktioniert).

Beobachtung 3.2: Fermats eigener Weg verneint eine Lösung, indem er zeigt, dass jede Lösung eine kleinere liefern würde (unendlicher Abstieg). Da $x^4 + y^4 = z^4$ ein Sonderfall von $x^4 + y^4 = (z^2)^2$ ist, erledigt das $n = 4$ —und jeder durch 4 teilbare Exponent lässt sich auf $n = 4$ zurückführen.

4. Kummers Weg (reguläre Primzahlen)

Rechnung 4.1: eine ungerade Primzahl p ist regulär, wenn p keinen der Zähler der Bernoulli-Zahlen $B_2, B_4, \dots, B_{p-3}$ teilt. Die Regularität wurde auf zwei Wegen entschieden, einer mit exakten Bernoulli-Zahlen und einer, der über eine Rekursion nur die Reste bei Division durch p verfolgt, und die Ergebnisse stimmten für jede Primzahl $p < 200$ überein. Dann wurde die Regularität bis $p < 1000$ entschieden.

Primzahlen von 3 bis unter 1000	167
regulär	103 (Anteil 0.616766)
irregulär	64
irreguläre Primzahlen unter 100	37, 59, 67

Zu den Primzahlen mit Irregularitätsindex 2 oder mehr gehören 157 ($k = 62, 110$) und 691 ($k = 12, 200$), insgesamt 14; 491, 617 und 647 haben den Index 3. Der Anteil 0.616766 weicht um $+0.010236$ von Siegels vermutetem $e^{-1/2} = 0.606531$ ab.

Beobachtung 4.2: Kummers Weg erreicht nur die regulären Primzahlen. Und während bekannt ist, dass es unendlich viele irreguläre Primzahlen gibt, ist noch unbekannt, ob es unendlich viele reguläre Primzahlen gibt—schon die Breite dessen, was dieser Weg erreicht, ist eine offene Frage.

5. Exponenten, die kein Weg erreicht

Rechnung 5.1: unter den Exponenten $n = 3$ bis 1000 gibt es von denen, die nicht durch 4 teilbar sind und keinen regulären ungeraden Primfaktor haben (die sich weder auf den unendlichen Abstieg noch auf Kummers Weg zurückführen lassen), 92. In aufsteigender Reihenfolge laufen sie 37, 59, 67, 74, 101, 103, 118, 131, 134, 149. In jedem ist jeder ungerade Primfaktor irregulär, und keiner ist durch 4 teilbar.

Beobachtung 5.2: das ist der Kern: Jedes Werkzeug erreicht einen anderen Bereich von Exponenten, und selbst zusammen lassen zwei von ihnen 92 Lücken bis 1000. Der unendliche Abstieg erreicht die Vielfachen von 4, Kummers Weg die Exponenten mit einem regulären ungeraden Primfaktor. Eine irreguläre Primzahl wie 37 selbst wird von keinem erreicht——dasselbe „keine Lösung“ wurde für verschiedene Exponenten auf verschiedenen Wegen erreicht, und nur der Weg von Wiles (die Frey-Kurve und die Modularität) erreichte sie alle.

6. Der Weg über die ABC-Vermutung (bedingt)

Rechnung 6.1: erfüllen teilerfremde $x < y < z$ die Gleichung $x^n + y^n = z^n$, so gilt $\text{rad}(x^n y^n z^n) = \text{rad}(xyz) \leq xyz < z^3$, also erfüllt die Qualität dieses Tripels

$$q = \frac{\log z^n}{\log \text{rad}(xyz)} > \frac{n}{3}.$$

$n/3$ ist 1.000000 für $n = 3$, 1.333333 für 4, 1.666667 für 5, 2.000000 für 6 und 2.333333 für 7.

bekannte höchste Qualität ($2 + 3^{10} \times 109 = 23^5$, Aufsatz 641)	1.629912 (Unterschied zu 5/3: −0.036755)
Tripel mit $q > 1$ und $c < 10^6$	1268 (höchstes 1.567887)
davon $q > 4/3$	20
davon $q > 5/3$	0

Beobachtung 6.2: für $n \geq 5$ wäre ein Gegenbeispiel ein Tripel höherer Qualität als jedes bisher gefundene. Ist die ABC-Vermutung wahr, so haben nur endlich viele Tripel eine Qualität über 5/3, also sind Gegenbeispiele mit großen Exponenten begrenzt. Andererseits gibt es Tripel, die die unteren Schranken 1 und 4/3 für $n = 3$ und 4 übersteigen, schon mit $c < 10^6$, und dieser Weg allein kann sie nicht ausschließen——der Weg über ABC erreicht große Exponenten, und der unendliche Abstieg und Kummers Weg kümmern sich um die kleinen.

7. Nah, aber nicht dort

Rechnung 7.1: mit $2 \leq x \leq y \leq 2000$ gibt es 18 Tripel, bei denen $x^3 + y^3$ um eins von einem Kubus abweicht (9 auf der Seite $z^3 + 1$ und 9 auf der Seite $z^3 - 1$). In aufsteigender Reihenfolge beginnen sie mit $6^3 + 8^3 = 9^3 - 1$, $9^3 + 10^3 = 12^3 + 1$ (1729) und $64^3 + 94^3 = 103^3 + 1$. Kein Tripel mit $x^3 + y^3 = z^3$ wurde gefunden.

Beobachtung 7.2: Beinahe-Treffer sind kein Hinweis auf eine Lösung. Es gibt 18 Tripel bis 2000, die um eins verfehlen, aber keines mit einer Abweichung von 0——„keine Lösung“ ist keine Frage der Nähe, sondern einer Struktur, die nicht genau gleich sein kann.

8. Der Separator

Beobachtung 8.1: der Separator ist der Bereich der Exponenten, den jedes Werkzeug erreicht. Der unendliche Abstieg erreicht die Vielfachen von 4, Kummers Weg die regulären Primzahlen, der Weg über ABC (bedingt) die großen Exponenten und der Weg der Polynome die Welt der Polynome. Jeder ist teilweise, und 92 Lücken bleiben bis 1000——dasselbe „keine Lösung“ wird von verschiedenen Werkzeugen über ihre eigenen Bereiche getragen, und nur der Weg von Wiles trug alles.

Beobachtung 8.2: neben Aufsatz 641, Aufsatz 31, Aufsatz 603 und Aufsatz 608. Aufsatz 641 ist die Herkunft des Wegs der Polynome und des Wegs über ABC, und Aufsatz 31 schrieb eine Adresse in Modulformen. Fermats Test in Aufsatz 603 und Kummers Satz in Aufsatz 608 sind andere Sätze derselben Personen——derselbe Name, der auf einen anderen Satz zeigt, ist ein anderes Werkzeug.

Beobachtung 8.3: was nicht gesagt wird. Der letzte Satz wird nicht bewiesen, vom Weg von Wiles wird nur die Adresse geschrieben, und er wird nicht „verschiedene Wurzeln“ genannt——gezeigt wird, bis zu welchen Exponenten jeder von vier Wegen reicht und wie viele Exponenten sie verfehlen.

9. Namensaufruf und Schluss

1. keine Polynomlösungen für $n = 3$ und 4 (Rechnung 2.1): **20 Paare für $n = 2$.**
2. der Weg der Polynome ist kein Weg für ganze Zahlen (Beobachtung 2.2): **keine Ableitung.**
3. $x^4 + y^4 = z^2$: keine bis 3000 (Rechnung 3.1): **positive Kontrolle 534.**
4. reguläre Primzahlen: **103 von 167** (Rechnung 4.1): **0.616766.**
5. irreguläre Primzahlen unter 100: **37, 59, 67** (Rechnung 4.1): **zwei Wege stimmen überein.**
6. unendlich viele reguläre Primzahlen ist offen (Beobachtung 4.2): **die Breite des Wegs ist eine Frage.**
7. **92 Exponenten, die kein Weg erreicht** (Rechnung 5.1): **der kleinste ist 37.**

8. jedes Werkzeug hat seinen eigenen Bereich (Beobachtung 5.2): der Kern.

9. die Qualität eines Gegenbeispiels übersteigt $n/3$ (Rechnung 6.1): jenseits des bekannten höchsten für $n \geq 5$.

10. 18 Beinahe-Treffer, 0 genaue (Rechnung 7.1): Nähe ist kein Hinweis.

Schluss: Zu Fermats letztem Satz, dass $x^n + y^n = z^n$ für $n \geq 3$ keine Lösung hat, gelangt der unendliche Abstieg von $n = 4$ aus und Kummers Weg von den regulären Primzahlen aus, und 0.616766 der ungeraden Primzahlen unter 1000 waren regulär. Selbst zusammen erreichen die beiden 92 der Exponenten bis 1000 nicht (der kleinste ist 37)—da die Qualität eines Gegenbeispiels $n/3$ übersteigen würde, erreicht der Weg über die ABC-Vermutung große Exponenten bedingt, die kleinen aber nicht. In der Welt der Polynome braucht es eine Zeile, und ganzzahlige Tripel, die um eins verfehlen, sind keine Lösungen. Der Separator ist der Bereich der Exponenten, den jedes Werkzeug erreicht. Unter die früheren Aufsätze gestellt—der Weg der Polynome und der Weg über ABC aus Aufsatz 641 treten in den Namensaufruf der Wege zum ganzzahligen letzten Satz ein. Offen gesagt—dem Weg von Wiles wird nur eine Adresse gegeben, und der Beweis des letzten Satzes wird nicht betreten.

Literatur

1. Granville, A., & Tucker, T. J. (2002). It's as easy as abc. *Notices of the American Mathematical Society*.
2. Taylor, R., & Wiles, A. (1995). Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras. *Annals of Mathematics*.
3. Washington, L. C. (1997). *Introduction to Cyclotomic Fields*. Springer.
4. Wiles, A. (1995). Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem. *Annals of Mathematics*.
5. Yamagishi, Y. (2026). *The π That Carries No Dimension* [Aufsatz 31]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22090430
6. Yamagishi, Y. (2026). *561 Passes Fermat's Test for Every Base Coprime to It* [Aufsatz 603]. Zenodo.
7. Yamagishi, Y. (2026). *The Odd Numbers in Pascal's Triangle Are Counted by the Ones in the Row Number Written in Binary* [Aufsatz 608]. Zenodo.
8. Yamagishi, Y. (2026). *The ABC Conjecture Is a Theorem for Polynomials and a Conjecture for Integers: Integers Lack the Derivative* [Aufsatz 641]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22805478

— From thinking to syncing. —

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)