

Les routes vers le dernier théorème de Fermat atteignent des exposants différents, et la descente et Kummer manquent ensemble 92 exposants jusqu'à 1000

— ensemble, les deux manquent encore 92 exposants jusqu'à 1000 (le plus petit est 37) — seule la route de Wiles les a tous atteints — [Article 642]

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japon
Septembre 2026

— *From thinking to syncing.* —

Résumé

Pour $n \geq 3$, $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution en entiers positifs premiers entre eux (le dernier théorème de Fermat, démontré par Wiles en 1995). Cet article ne démontre rien ; il expose les routes qui atteignent ce « pas de solution » et compte quels exposants chacune atteint. Aucun théorème ni aucune loi nouvelle n'est revendiqué.

Premièrement, la route de la descente infinie atteint $n = 4$ — $x^4 + y^4 = z^2$ n'a pas de solution jusqu'à 3000, alors que la même recherche a trouvé 534 solutions premières entre elles de $x^2 + y^2 = z^2$. Si l'exposant est divisible par 4, cette route suffit (Section 3).

Deuxièmement, la route de Kummer atteint les nombres premiers réguliers — si un nombre premier p est régulier (p ne divise aucun des numérateurs des nombres de Bernoulli $B_2, \dots, B_{p-3}$), il n'y a pas de solution d'exposant p . Des 167 nombres premiers de 3 à moins de 1000, 103 sont réguliers (une proportion de 0.616766), et les seuls irréguliers sous 100 sont 37, 59 et 67 (Section 4).

Troisièmement, et c'est le cœur. Même ensemble, les deux routes laissent des exposants hors d'atteinte — les exposants non divisibles par 4 et sans facteur premier impair régulier sont au nombre de 92 jusqu'à 1000, le plus petit étant 37. Chaque outil atteint un domaine d'exposants différent, et seule la route de Wiles les a tous atteints (Section 5).

Quatrièmement, la route par la conjecture ABC atteint les grands exposants (sous condition) — un contre-exemple aurait une qualité $\log z^n / \log \text{rad}(xyz)$ supérieure à $n/3$. Pour $n \geq 5$ cela dépasse $5/3$, au-dessus du plus haut connu, 1.629912, vérifié dans l'Article 641. Aucun des 1268 triplets avec $c < 10^6$ n'a $q > 5/3$. Des triplets dépassant les bornes inférieures 1 et $4/3$ pour $n = 3$ et 4 existent pourtant (Section 6).

Cinquièmement, dans le monde des polynômes il suffit d'une ligne, et les quasi-solutions ne sont pas des solutions — une recherche exhaustive sur des polynômes à petits coefficients a trouvé 20 paires pour $n = 2$ et aucune pour $n = 3$ ou 4 (une conséquence de Mason–Stothers). Parmi les entiers il y a 18 triplets jusqu'à 2000 qui manquent d'un, comme $9^3 + 10^3 = 12^3 + 1$, mais aucun qui tombe juste (Sections 2 et 7).

Mots-clés : dernier théorème de Fermat, descente infinie, nombres premiers réguliers, nombres de Bernoulli, Kummer.

Portée (scope note) : Aucun théorème ni aucune loi nouvelle n'est revendiqué——le dernier théorème et sa preuve (Wiles, et Taylor et Wiles, 1995), la descente infinie pour $n = 4$ (Fermat), le théorème de Kummer sur les nombres premiers réguliers (vers 1850), la liste des nombres premiers irréguliers, la conjecture selon laquelle la proportion de nombres premiers réguliers est proche de $e^{-1/2}$ (Siegel), et le fait que la conjecture ABC exclut les grands exposants (l'exposé de Granville et Tucker, entre autres) sont tous connus. Le dernier théorème n'est pas démontré——la route de Wiles (la courbe de Frey et la modularité) ne peut pas être suivie en nombres, si bien que seule son adresse est écrite. On ne parle pas de « racines distinctes »——ce qui sépare ici n'est pas la source d'un phénomène mais l'outil de la preuve, d'où l'expression « routes distinctes ». Les théorèmes de même nom sont tenus à part——le test de Fermat (le petit théorème) de l'Article 603 et le théorème de Kummer sur les retenues de l'Article 608 sont des théorèmes différents du Fermat et du Kummer de cet article. Relation avec les articles précédents : l'Article 641 a compté que la conjecture ABC est un théorème pour les polynômes et une conjecture pour les entiers, et a placé Fermat pour les polynômes comme conséquence en une ligne——cet article place cette route polynomiale et la route par ABC dans un appel des routes vers le dernier théorème pour les entiers. L'Article 31 a donné au π de la série de Ramanujan l'adresse d'une période de formes modulaires——la route de Wiles passe elle aussi par les formes modulaires. Ce qui est ajouté, c'est décider la régularité jusqu'à 1000 par deux voies, compter les exposants atteints ni par la descente ni par Kummer, confronter la borne inférieure $n/3$ sur la qualité d'un contre-exemple aux triplets connus, et placer le séparateur sur le domaine d'exposants que chaque outil atteint.

1. Notations et question

Le dernier théorème : pour $n \geq 3$, $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution en entiers positifs premiers entre eux. Pour un diviseur d de n , une solution de $x^n + y^n = z^n$ donne une solution de $(x^{n/d})^d + (y^{n/d})^d = (z^{n/d})^d$. Tout $n \geq 3$ est divisible par 4 ou par un nombre premier impair, donc il suffit de montrer qu'il n'y a pas de solution pour $n = 4$ et pour les nombres premiers impairs p .

Question : quels outils atteignent ce « pas de solution », et jusqu'à quels exposants ?

2. Le monde des polynômes

Calcul 2.1 : parmi les 124 polynômes de degré au plus 2 à coefficients entiers de -2 à 2 , on a choisi des paires non constantes premières entre elles $x(t)$, $y(t)$, et on a cherché celles pour lesquelles $x^n + y^n$ est la puissance n -ième d'un polynôme (restreint par les valeurs en $t = 2$ à 8 et confirmé par factorisation). Pour $n = 2$, 20 paires ont été trouvées (dont $(2t)^2 + (t^2 - 1)^2 = (t^2 + 1)^2$) ; pour $n = 3$ et 4 , aucune.

Observation 2.2 : dans le monde des polynômes, tout $n \geq 3$ est atteint en une ligne. En appliquant le théorème de Mason–Stothers de l'Article 641, avec D le plus grand degré, on obtient $nD \leq 3D - 1$, donc $n < 3$ ——mais c'est le

dernier théorème pour les polynômes, non une route vers le dernier théorème pour les entiers. Il manque aux entiers la dérivée qu'utilise sa preuve.

3. La route de la descente infinie (n = 4)

Calcul 3.1 : la recherche dans $1 \leq x \leq y \leq 3000$ d'un entier z avec $x^4 + y^4 = z^2$ n'en a trouvé aucun. La même recherche a trouvé 534 solutions premières entre elles de $x^2 + y^2 = z^2$ (un témoin positif que la recherche fonctionne).

Observation 3.2 : la route de Fermat lui-même nie une solution en montrant que toute solution en donnerait une plus petite (descente infinie). Comme $x^4 + y^4 = z^4$ est un cas particulier de $x^4 + y^4 = (z^2)^2$, cela règle $n = 4$ — et tout exposant divisible par 4 se ramène à $n = 4$.

4. La route de Kummer (nombres premiers réguliers)

Calcul 4.1 : un nombre premier impair p est régulier quand p ne divise aucun des numérateurs des nombres de Bernoulli $B_2, B_4, \dots, B_{p-3}$. La régularité a été décidée par deux voies, l'une utilisant les nombres de Bernoulli exacts et l'autre ne suivant, par une récurrence, que les restes de la division par p , et les résultats ont concordé pour tout nombre premier $p < 200$. La régularité a ensuite été décidée jusqu'à $p < 1000$.

nombres premiers de 3 à moins de 1000	167
réguliers	103 (proportion 0.616766)
irréguliers	64
nombres premiers irréguliers sous 100	37, 59, 67

Parmi les nombres premiers d'indice d'irrégularité 2 ou plus figurent 157 ($k = 62, 110$) et 691 ($k = 12, 200$), 14 en tout ; 491, 617 et 647 ont l'indice 3. La proportion 0.616766 diffère de $+0.010236$ de la valeur conjecturée par Siegel, $e^{-1/2} = 0.606531$.

Observation 4.2 : la route de Kummer n'atteint que les nombres premiers réguliers. Et alors qu'on sait qu'il existe une infinité de nombres premiers irréguliers, on ignore encore s'il existe une infinité de nombres premiers réguliers — l'étendue même de ce qu'atteint cette route est une question ouverte.

5. Des exposants qu’aucune route n’atteint

Calcul 5.1 : parmi les exposants $n = 3$ à 1000, ceux qui ne sont pas divisibles par 4 et n’ont pas de facteur premier impair régulier (qui ne se ramènent ni à la descente infinie ni à la route de Kummer) sont au nombre de 92. Par ordre croissant ils vont 37, 59, 67, 74, 101, 103, 118, 131, 134, 149. Dans chacun, tout facteur premier impair est irrégulier, et aucun n’est divisible par 4.

Observation 5.2 : c’est le cœur : chaque outil atteint un domaine d’exposants différent, et même ensemble deux d’entre eux laissent 92 lacunes jusqu’à 1000. La descente infinie atteint les multiples de 4, la route de Kummer les exposants ayant un facteur premier impair régulier. Un nombre premier irrégulier comme 37 lui-même n’est atteint par aucune des deux — le même « pas de solution » a été atteint par des routes différentes pour des exposants différents, et seule la route de Wiles (la courbe de Frey et la modularité) les a tous atteints.

6. La route par la conjecture ABC (sous condition)

Calcul 6.1 : si des $x < y < z$ premiers entre eux vérifient $x^n + y^n = z^n$, alors $\text{rad}(x^n y^n z^n) = \text{rad}(xyz) \leq xyz < z^3$, donc la qualité de ce triplet vérifie

$$q = \frac{\log z^n}{\log \text{rad}(xyz)} > \frac{n}{3}.$$

$n/3$ vaut 1.000000 pour $n = 3$, 1.333333 pour 4, 1.666667 pour 5, 2.000000 pour 6 et 2.333333 pour 7.

plus haute qualité connue ($2 + 3^{10} \times 109 = 23^5$, Article 641)	1.629912 (écart à $5/3$: -0.036755)
triplets avec $q > 1$ et $c < 10^6$	1268 (le plus haut 1.567887)
dont $q > 4/3$	20
dont $q > 5/3$	0

Observation 6.2 : pour $n \geq 5$, un contre-exemple serait un triplet de qualité plus haute que tout ce qui a été trouvé jusqu’ici. Si la conjecture ABC est vraie, seuls un nombre fini de triplets ont une qualité supérieure à $5/3$, donc les contre-exemples à grands exposants sont limités. En revanche, des triplets dépassant les bornes inférieures 1 et $4/3$ pour $n = 3$ et 4 existent déjà avec $c < 10^6$, et cette route seule ne peut pas les exclure — la route par ABC atteint les grands exposants, et la descente infinie et la route de Kummer se chargent des petits.

7. Proche, mais pas là

Calcul 7.1 : avec $2 \leq x \leq y \leq 2000$, 18 triplets ont $x^3 + y^3$ différent d'un cube de un (9 du côté $z^3 + 1$ et 9 du côté $z^3 - 1$). Par ordre croissant ils commencent par $6^3 + 8^3 = 9^3 - 1$, $9^3 + 10^3 = 12^3 + 1$ (1729) et $64^3 + 94^3 = 103^3 + 1$. Aucun triplet avec $x^3 + y^3 = z^3$ n'a été trouvé.

Observation 7.2 : les quasi-solutions ne sont pas un indice de solution. Il y a 18 triplets jusqu'à 2000 qui manquent d'un, mais aucun avec un écart de 0 — « pas de solution » n'est pas une affaire de proximité mais d'une structure qui ne peut pas être exactement égale.

8. Le séparateur

Observation 8.1 : le séparateur est le domaine d'exposants que chaque outil atteint. La descente infinie atteint les multiples de 4, la route de Kummer les nombres premiers réguliers, la route par ABC (sous condition) les grands exposants, et la route polynomiale le monde des polynômes. Chacune est partielle, et 92 lacunes demeurent jusqu'à 1000 — le même « pas de solution » est soutenu par des outils différents sur leurs propres domaines, et seule la route de Wiles l'a soutenu en entier.

Observation 8.2 : à côté de l'Article 641, de l'Article 31, de l'Article 603 et de l'Article 608. L'Article 641 est l'origine de la route polynomiale et de la route par ABC, et l'Article 31 a écrit une adresse dans les formes modulaires. Le test de Fermat de l'Article 603 et le théorème de Kummer de l'Article 608 sont des théorèmes différents des mêmes personnes — le même nom, désignant un théorème différent, est un outil différent.

Observation 8.3 : ce qui n'est pas dit. Le dernier théorème n'est pas démontré, seule l'adresse de la route de Wiles est écrite, et on ne parle pas de « racines distinctes » — ce qui est montré, c'est jusqu'à quels exposants chacune des quatre routes va, et combien d'exposants elles manquent.

9. Appel et conclusion

1. pas de solutions polynomiales pour $n = 3$ et 4 (Calcul 2.1) : 20 paires pour $n = 2$.
2. la route polynomiale n'est pas une route pour les entiers (Observation 2.2) : pas de dérivée.
3. $x^4 + y^4 = z^2$: aucune jusqu'à 3000 (Calcul 3.1) : témoin positif 534.
4. nombres premiers réguliers : 103 sur 167 (Calcul 4.1) : 0.616766.
5. nombres premiers irréguliers sous 100 : 37, 59, 67 (Calcul 4.1) : deux voies concordent.
6. l'infinité des nombres premiers réguliers est ouverte (Observation 4.2) : l'étendue de la route est une question.
7. 92 exposants qu'aucune route n'atteint (Calcul 5.1) : le plus petit est 37.

8. chaque outil a son propre domaine (Observation 5.2) : le cœur.
9. la qualité d'un contre-exemple dépasse $n/3$ (Calcul 6.1) : au-delà du plus haut connu pour $n \geq 5$.
10. 18 quasi-solutions, 0 exacte (Calcul 7.1) : la proximité n'est pas un indice.

Conclusion : Au dernier théorème de Fermat, selon lequel $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution pour $n \geq 3$, la descente infinie parvient depuis $n = 4$ et la route de Kummer depuis les nombres premiers réguliers, et 0.616766 des nombres premiers impairs sous 1000 étaient réguliers. Même ensemble, les deux n'atteignent pas 92 des exposants jusqu'à 1000 (le plus petit étant 37)——comme la qualité d'un contre-exemple dépasserait $n/3$, la route par la conjecture ABC atteint sous condition les grands exposants, mais pas les petits. Dans le monde des polynômes il suffit d'une ligne, et les triplets entiers qui manquent d'un ne sont pas des solutions. Le séparateur est le domaine d'exposants que chaque outil atteint. Situé parmi les articles précédents——la route polynomiale et la route par ABC de l'Article 641 entrent dans l'appel des routes vers le dernier théorème pour les entiers. Pour être honnête——la route de Wiles ne reçoit qu'une adresse, et la preuve du dernier théorème n'est pas abordée.

Références

1. Granville, A., & Tucker, T. J. (2002). It's as easy as abc. *Notices of the American Mathematical Society*.
 2. Taylor, R., & Wiles, A. (1995). Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras. *Annals of Mathematics*.
 3. Washington, L. C. (1997). *Introduction to Cyclotomic Fields*. Springer.
 4. Wiles, A. (1995). Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem. *Annals of Mathematics*.
 5. Yamagishi, Y. (2026). *The π That Carries No Dimension* [Article 31]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22090430
 6. Yamagishi, Y. (2026). *561 Passes Fermat's Test for Every Base Coprime to It* [Article 603]. Zenodo.
 7. Yamagishi, Y. (2026). *The Odd Numbers in Pascal's Triangle Are Counted by the Ones in the Row Number Written in Binary* [Article 608]. Zenodo.
 8. Yamagishi, Y. (2026). *The ABC Conjecture Is a Theorem for Polynomials and a Conjecture for Integers: Integers Lack the Derivative* [Article 641]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22805478
-

— From thinking to syncing. —

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)