

フェルマーの最終定理への道は道具で範囲が違い、降下とクンマーは 92 個の指数に届かない

— 二つを合わせても 1000 以下の指数のうち 92 個（最小は 37）に届かない — 全部に届いたのはワイルズの道だけである — [論文642]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

$n \geq 3$ のとき、 $x^n + y^n = z^n$ に互いに素な正の整数の解は無い（フェルマーの最終定理。ワイルズが 1995 年に証明した）。本稿は証明をせず、この「解が無い」に届く道を並べ、それぞれがどの指数まで届くかを数える。新しい定理も法則も主張しない。第一に、無限降下の道は $n = 4$ に届く—— $x^4 + y^4 = z^2$ の解は 3000 まで 1 つも無く、同じ探し方で $x^2 + y^2 = z^2$ の互いに素な解は 534 個見つかった。指数が 4 で割り切れれば、この道で済む（第3節）。第二に、クンマーの道は正則な素数に届く——素数 p が正則（ベルヌーイ数 $B_2, \dots, B_{p-3}$ の分子を p が割らない）なら、指数 p で解は無い。3 以上 1000 未満の素数 167 個のうち正則なのは 103 個（割合 0.616766）で、100 未満で正則でないのは $37 \cdot 59 \cdot 67$ だけだった（第4節）。第三に、これが本稿の芯である。二つの道を合わせても、届かない指数が残る——4 で割り切れず、正則な奇素数も因数に持たない指数は、1000 以下に 92 個あり、最小は 37 だった。道具ごとに届く指数の範囲が違い、全部に届いたのはワイルズの道だけである（第5節）。第四に、ABC 予想からの道は大きな指数に届く（条件付き）——反例があれば、その組の質 $\log z^n / \log \text{rad}(xyz)$ は必ず $n/3$ を超える。 $n \geq 5$ なら $5/3$ を超え、論文641 で確かめた知られた最高 1.629912 を上回る。 $c < 10^6$ の 1268 組に $q > 5/3$ は 1 つも無かった。一方 $n = 3 \cdot 4$ の下限 $1 \cdot 4/3$ を超える組はある（第6節）。第五に、多項式の世界では一行で済み、近い組は解ではない——係数の小さい多項式の総当たりで、 $n = 2$ は 20 組見つかり、 $n = 3 \cdot 4$ は 0 だった（メイソン＝ストザースの帰結）。整数では $9^3 + 10^3 = 12^3 + 1$ のように 1 だけずれる組が 2000 までに 18 組あるが、ぴったりの組は無い（第2節・第7節）。キーワード：フェルマーの最終定理、無限降下法、正則素数、ベルヌーイ数、クンマー。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——最終定理とその証明（ワイルズ、テイラーとワイルズ、1995）、 $n=4$ の無限降下（フェルマー）、正則素数についてのクンマーの定理（1850年ごろ）、正則でない素数の一覧、正則な素数の割合が $e^{-1/2}$ に近いという予想（ジーゲル）、ABC予想から大きな指数が除かれること（グランヴィルとタッカーの解説ほか）は、いずれも既知である。最終定理を証明しない——ワイルズの道（フライ曲線とモジュラー性）は、数で追えないので住所だけを書く。「別根」とは呼ばない——分かれているのは現象の源ではなく証明の道具なので、「別の道」と呼ぶ。同じ名前の別の定理に注意する——論文603のフェルマーの判定（小定理）、論文608のクンマーの定理（繰り上がり）は、本稿のフェルマー・クンマーとは別の定理である。既刊との関係：論文641は、ABC予想が多項式では定理で整数では予想であることを数え、多項式のフェルマーを一行の帰結として置いた——本稿はその多項式の道とABCからの道を、整数の最終定理への道の点呼の中に置き直す。論文31は、ラマヌジャンの級数の π をモジュラー形式の周期と住所づけた——ワイルズの道もモジュラー形式を通る。加えたのは、正則素数を二つの道筋で1000まで判定したこと、降下とクンマーのどちらでも届かない指数を数えたこと、反例の質の下限 $n/3$ を既知の組と突き合わせたこと、分離子を「道具ごとに届く指数の範囲」に置いたことである。

1. 記法と問い

最終定理： $n \geq 3$ のとき、 $x^n + y^n = z^n$ に互いに素な正の整数の解は無い。 n の約数 d について、 $x^n + y^n = z^n$ の解は $(x^{n/d})^d + (y^{n/d})^d = (z^{n/d})^d$ の解になる。3以上のどの n も4か奇素数で割り切れるので、 $n=4$ と奇素数 p について解が無いことを言えば足りる。

問い：この「解が無い」に、どの道具が、どの指数まで届くか。

2. 多項式の世界

計算 2.1：係数が -2 から 2 の整数で次数 2 以下の多項式124個から、互いに素で定数でない組 $x(t) \cdot y(t)$ を選び、 $x^n + y^n$ が多項式の n 乗になるものを探した（ $t=2$ から 8 の値で絞り、因数分解で確かめた）。 $n=2$ では20組見つかり（ $(2t)^2 + (t^2 - 1)^2 = (t^2 + 1)^2$ を含む）、 $n=3 \cdot 4$ では1組も無かった。

観察 2.2

多項式の世界では、どの $n \geq 3$ にも一行で届く。論文641のメイソン＝ストザースの定理を当てると、 D を次数の最大として $nD \leq 3D - 1$ となり、 $n < 3$ でなければならない——ただしこれは多項式の最終定理であって、整数の最終定理への道ではない。整数には、その証明が使う微分が無い。

3. 無限降下の道 (n=4)

計算 3.1 : $1 \leq x \leq y \leq 3000$ で $x^4 + y^4 = z^2$ となる整数 z を探すと、1 つも無かった。同じ探し方で、互いに素な $x^2 + y^2 = z^2$ の解は 534 個見つかった (探し方が働いていることの陽性対照)。

観察 3.2

フェルマー自身の道は、解があれば、より小さい解が作れることを示して、解の存在を否定する (無限降下)。 $x^4 + y^4 = z^4$ は $x^4 + y^4 = (z^2)^2$ の特別な場合なので、 $n = 4$ はこれで済む——そして 4 で割り切れる指数は、すべて $n = 4$ に帰着する。

4. クンマーの道 (正則な素数)

計算 4.1 : 奇素数 p が正則とは、ベルヌーイ数 $B_2, B_4, \dots, B_{p-3}$ の分子を p が割らないことである。正確なベルヌーイ数を使う道筋と、 p で割った余りだけを漸化式で追う道筋の二つで判定し、 $p < 200$ のすべての素数で結果が一致した。そのうえで $p < 1000$ まで判定した。

3 以上 1000 未満の素数	167 個
正則	103 個 (割合 0.616766)
正則でない	64 個
100 未満の正則でない素数	$37 \cdot 59 \cdot 67$

正則でない度合いが 2 以上の素数は 157 ($k = 62 \cdot 110$)、691 ($k = 12 \cdot 200$) など 14 個、 $491 \cdot 617 \cdot 647$ は 3 だった。割合 0.616766 は、ジーゲルの予想の $e^{-1/2} = 0.606531$ と +0.010236 の差である。

観察 4.2

クンマーの道は、正則な素数にだけ届く。そして正則でない素数が限りなくあることは知られているが、正則な素数が限りなくあるかは、まだ分かっていない——この道が届く範囲の広さそのものが、未解決の問いである。

5. 二つの道の届かない指数

計算 5.1：指数 $n = 3$ から 1000 のうち、4 で割り切れず、正則な奇素数も因数に持たないもの（無限降下にもクンマーの道にも帰着しないもの）を数えると、92 個だった。小さい順に $37 \cdot 59 \cdot 67 \cdot 74 \cdot 101 \cdot 103 \cdot 118 \cdot 131 \cdot 134 \cdot 149$ と続く。どれも、奇素因数がすべて正則でない素数で、4 で割り切れない。

観察 5.2

これが本稿の芯である。道具ごとに届く指数の範囲が違い、二つを合わせても 1000 以下に 92 個の穴が残る。無限降下は 4 の倍数に、クンマーの道は正則な奇素数を因数に持つ指数に届く。37 のように正則でない素数そのものには、どちらも届かない——同じ「解が無い」でも、どの道で届いたかは指数ごとに違い、全部に届いたのはワイルズの道（フライ曲線とモジュラー性）だけである。

6. ABC 予想からの道（条件付き）

計算 6.1：互いに素な $x < y < z$ で $x^n + y^n = z^n$ なら、 $\text{rad}(x^ny^nz^n) = \text{rad}(xyz) \leq xyz < z^3$ なので、この組の質は

$$q = \frac{\log z^n}{\log \text{rad}(xyz)} > \frac{n}{3}$$

を満たす。 $n/3$ は $n = 3$ で 1.000000、4 で 1.333333、5 で 1.666667、6 で 2.000000、7 で 2.333333 である。

知られた最高の質 ($2 + 3^{10} \times 109 = 23^5$ 、論文641)	1.629912 (5/3 との差 -0.036755)
$c < 10^6$ の $q > 1$ の組	1268 個 (最高 1.567887)
そのうち $q > 4/3$	20 個
そのうち $q > 5/3$	0 個

観察 6.2

反例があれば、 $n \geq 5$ ではこれまでに見つかったどの組よりも質の高い組になる。ABC 予想が正しければ、質が 5/3 を超える組は有限個しかないので、大きな指数の反例は限られる。一方 $n = 3 \cdot 4$ の下限 $1 \cdot 4/3$ を超える組は $c < 10^6$ にもあり、この道だけでは除けない——ABC からの道は大きな指数に届き、小さな指数は無限降下とクンマーの道が受け持つ。

7. 近いが無い

計算 7.1 : $2 \leq x \leq y \leq 2000$ で、 $x^3 + y^3$ が立方数と 1 だけずれる組は 18 組あった ($z^3 + 1$ の側 9 組、 $z^3 - 1$ の側 9 組)。小さい順に $6^3 + 8^3 = 9^3 - 1$ 、 $9^3 + 10^3 = 12^3 + 1$ (1729)、 $64^3 + 94^3 = 103^3 + 1$ である。
 $x^3 + y^3 = z^3$ の組は 1 つも無かった。

観察 7.2

近い組があることは、解があることの手がかりにならない。1 だけずれる組は 2000 までに 18 組あるが、ずれが 0 の組は無い——「解が無い」は、近さの問題ではなく、ぴったり等しくなれない構造の問題である。

8. 分離子

観察 8.1

分離子は、道具ごとに届く指数の範囲である。無限降下は 4 の倍数、クンマーの道は正則な素数、ABC からの道は (条件付きで) 大きな指数、多項式の道は多項式の世界に届く。どれも一部で、1000 以下に 92 個の穴が残る——同じ「解が無い」を、別々の道具がそれぞれの範囲で支え、全部を支えたのはワイルズの道だけである。

観察 8.2

論文 641・論文 31・論文 603・論文 608 と並べる。641 は多項式の道と ABC からの道の出どころで、31 はモジュラー形式に住所を書いた。603 のフェルマーの判定と 608 のクンマーの定理は、同じ人の別の定理である——名前が同じでも、指している定理が違えば道具も違う。

観察 8.3

言わないこと。最終定理を証明しない。ワイルズの道は住所だけを書いた。「別根」とも呼ばない——示したのは、四つの道がそれぞれどの指数まで届くか、そして届かない指数の数である。

9. 点呼と結び

1. 多項式では $n = 3 \cdot 4$ の解が 0 (計算 2.1) : $n = 2$ は 20 組。
2. 多項式の道は整数の道ではない (観察 2.2) : 微分が無い。
3. $x^4 + y^4 = z^2$ は 3000 まで 0 (計算 3.1) : 陽性対照は 534。
4. 正則な素数は 103/167 (計算 4.1) : 0.616766。
5. 100 未満の正則でない素数は $37 \cdot 59 \cdot 67$ (計算 4.1) : 二つの道筋が一致。
6. 正則な素数が限りなくあるかは未解決 (観察 4.2) : 道の広さが問い。
7. 二つの道の届かない指数は 92 個 (計算 5.1) : 最小は 37。
8. 道具ごとに範囲が違う (観察 5.2) : 本稿の芯。
9. 反例の質は $n/3$ 超え (計算 6.1) : $n \geq 5$ で既知の最高を上回る。
10. 1 だけずれる組は 18、ぴったりは 0 (計算 7.1) : 近さは手がかりにならない。

結び : $n \geq 3$ で $x^n + y^n = z^n$ に解が無いというフェルマーの最終定理に、無限降下は $n = 4$ から、クンマーの道は正則な素数から届き、1000 未満の奇素数の 0.616766 が正則だった。二つを合わせても、1000 以下の指数のうち 92 個 (最小は 37) には届かない——反例があればその質は $n/3$ を超えるので、ABC 予想からの道は条件付きで大きな指数に届くが、小さな指数には届かない。多項式の世界では一行で済み、整数の 1 だけずれる組は解ではない。分離子は、道具ごとに届く指数の範囲である。既刊との位置——論文641 の多項式の道と ABC の道が、整数の最終定理への道の点呼の中に入る。正直に言えば——ワイルズの道には住所を書いただけで、最終定理の証明には入っていない。

参考文献

1. Granville, A., & Tucker, T. J. (2002). It's as easy as abc. *Notices of the American Mathematical Society*.
2. Taylor, R., & Wiles, A. (1995). Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras. *Annals of Mathematics*.
3. Washington, L. C. (1997). *Introduction to Cyclotomic Fields*. Springer.
4. Wiles, A. (1995). Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem. *Annals of Mathematics*.
5. 山岸勇輝 (2026). 『次元を持たない π 』 [論文31]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22090430
6. 山岸勇輝 (2026). 『561 は、互いに素などの底で試しても、フェルマーの判定を通る』 [論文603]. Zenodo.
7. 山岸勇輝 (2026). 『パスカルの三角形の奇数は、行の番号を二進法で書いたときの 1 の数で決まる』 [論文608]. Zenodo.
8. 山岸勇輝 (2026). 『ABC 予想は多項式では定理で、整数では予想である——証明に要る微分が整数には無い』 [論文641]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22805478

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)