引力が無くても凝縮は起きる——決めるのは相互作用ではなく、波長が間隔を越えること

— 理想ボース気体の凝縮温度の式に入っているのは、定数と質量と数密度だけで、粒子間のポテンシャルは一つも入っていない — 分離子は、相互作用を切ったら消えるかである — [論文663]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

相が変わるのは、粒子どうしが引き合うからだと考えるのは自然である。だがボース粒子の凝縮は、引力を一つも入れなくても起きる。理想ボース気体の凝縮温度を三つの場合で数え、何がその温度を決めているのかを見る。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、凝縮温度の式には、粒子間のポテンシャルが一つも入っていない——入っているのはプランク定数、ボルツマン定数、粒子の質量、数密度の四つだけで、相互作用の強さを表す量は現れない（第2節）。 第二に、それでも温度は具体的に決まる——Rb87 を 1 立方メートルあたり 10^{20} 個にすると **398.3307 nK**、液体ヘリウムの密度（2.181607×10^{28} 個）なら **3.134378 K** で、後者は実測のラムダ点 2.1768 K の **1.439902** 倍だった（第2節）。 第三に、これが本稿の芯である。条件は一つの無次元の数である——凝縮温度では、数密度に熱的ド・ブロイ波長の三乗を掛けた量がちょうど **2.6123753487** になり、質量も密度も違う三つの場合で 10 桁一致した（第3節）。 第四に、波長が粒子の間隔を越えるところが境目である——Rb87 の例では、粒子間の平均距離 2.154435×10^{-7} m に対して、凝縮温度での熱的ド・ブロイ波長は 2.967189×10^{-7} m で、**1.377247** 倍だった（第3節）。 第五に、密度を上げても温度は同じようには上がらない——密度を 10 倍にしても凝縮温度は **4.641589** 倍にしかならず、これは 10 の 2/3 乗である（第2節）。 第六に、分離子は、相互作用を切ったら消えるかである——本稿の計算は相互作用を一つも含まずに凝縮を出しており、切っても消えない。対をつくる必要がある凝縮は、切れば消える（第4節）。 キーワード：ボース・アインシュタイン凝縮、理想ボース気体、位相空間密度、熱的ド・ブロイ波長、臨界温度、ボース統計。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——理想ボース気体の凝縮（アインシュタイン 1925）、熱的ド・ブロイ波長、リーマンのゼータ関数の 3/2 での値は、いずれも既知である。相互作用のある凝縮体を扱わない——散乱長、平均場の方程式、相互作用による凝縮温度のずれは入れない。理想気体だけを見る。実験を論じない——どう冷やすか（蒸発冷却、磁気光学トラップ）、どう観測するかは主題ではない。超伝導を説明しない——対をつくる凝縮に本稿は立ち入らない。分離子として「相互作用を切ったら消えるか」を置くにとどめる。有限の系を扱わない——熱力学極限で数えており、粒子数が少ないときの丸みは入れない。既刊との関係：論文482 は「臨界次元」という一語が上と下で別の数を指すことを示し、射程注記で「凝縮そのものを論じない——相転移の存在証明、有限系での振舞い、相互作用のある場合は主題ではない」と明記した——本稿はその席に座り、同じ理想ボース気体で、凝縮の条件そのものを数える。加えたのは、凝縮温度の式に相互作用が入っていないことを式の中身で示したこと、三つの場合で位相空間密度が同じ定数になることを 10 桁で確かめたこと、波長と粒子間距離の比を出したこと、分離子を「相互作用を切ったら消えるか」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：質量 m のボース粒子が、数密度 n で、たがいに力を及ぼさずに容器に入っている。温度 T での熱的ド・ブロイ波長を λ とする。

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}, \qquad T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{m k_B}\left(\frac{n}{\zeta(3/2)}\right)^{2/3}$$

$\zeta(3/2) = 2.6123753487$ である。この二つの式に現れるのは、定数と質量と数密度だけである。

問い：凝縮を起こしているのは、粒子どうしの引力か、それとも数え方か。

2. 統計だけで出る温度

計算 2.1：三つの場合について凝縮温度を出した。

場合	数密度（$1/\mathrm{m}^3$）	凝縮温度
Rb87 の希薄気体	1.000000×10^{20}	398.3307 nK
Rb87（10 倍の密度）	1.000000×10^{21}	1.848887 μK
液体ヘリウムの密度	2.181607×10^{28}	3.134378 K

液体ヘリウムの密度で出した 3.134378 K は、実測のラムダ点 2.1768 K の 1.439902 倍である。理想気体として数えた値が、相互作用のある実物の転移温度と同じ桁に来る。

計算 2.2：密度を 10 倍にすると、凝縮温度は 4.641589 倍になった。式の指数どおり $10^{2/3}$ である。

> **観察 2.3**
>
> この温度を決めたのは相互作用ではない。上の計算に入れた量は、プランク定数、ボルツマン定数、質量、数密度の四つだけである。引力の強さも、散乱長も、ポテンシャルの形も一度も使っていない——それでも、有限の温度で凝縮が始まる。

3. 条件は一つの無次元の数である

計算 3.1：三つの場合について、凝縮温度での位相空間密度（数密度に熱的ド・ブロイ波長の三乗を掛けた量）を出した。

場合	凝縮温度での位相空間密度
Rb87 の希薄気体	2.6123753487
Rb87（10 倍の密度）	2.6123753487
液体ヘリウムの密度	2.6123753487

質量が 21.7 倍、密度が 2.2×10^{8} 倍違う三つが、同じ 2.6123753487 を返す。これは $\zeta(3/2)$ そのものである。

計算 3.2：Rb87・$n = 10^{20}$ の場合、粒子間の平均距離は 2.154435×10^{-7} m、凝縮温度での熱的ド・ブロイ波長は 2.967189×10^{-7} m で、比は 1.377247 である。温度が 1 μK のときの位相空間密度は 0.656752 で、1 を下回る。

> **観察 3.3**
>
> 境目は、波長が間隔を越えるところにある。冷やすと熱的ド・ブロイ波長が伸び、粒子間の距離に追いつく。追いついたところで、同じ状態を占めることを妨げるものが無くなる——凝縮の条件は「引力が十分に強いか」ではなく「波長が間隔を越えたか」である。

計算 3.4：凝縮した割合は $1 - (T/T_c)^{3/2}$ で、$T/T_c = 0.9$ で 0.146185、0.5 で 0.646447、0.1 で 0.968377 である。

4. 分離子

> **観察 4.1**
>
> 分離子は、相互作用を切ったら消えるかである。本稿の計算は相互作用を一つも含まない。だから相互作用を切っても、この凝縮は消えない——対をつくることが要る凝縮は、切れば消える。同じ「凝縮」という語が、この一点で二つに分かれる。

> **観察 4.2**
>
> 論文482 と並べる。482 は理想ボース気体の積分の赤外側を見て、「臨界次元」という一語が上と下で別の数を指すことを示し、凝縮そのものは論じないと明記した——本稿はその席で、同じ理想気体の凝縮の条件を数えた。

> **観察 4.3**
>
> 言わないこと。相互作用のある凝縮体、実験の冷却法、有限の粒子数での丸みは扱っていない。液体ヘリウムのラムダ点が理想気体の値と 1.439902 倍違うことは、相互作用が効いている証拠であって、本稿はその大きさを説明しない——示したのは、引力が無くても凝縮の条件が立つことである。

5. 点呼と結び

1. 式に入るのは四つの量だけ（観察 2.3）：ポテンシャルは無い。
2. Rb87 で **398.3307 nK**（計算 2.1）：希薄な気体。
3. 液体ヘリウムの密度で **3.134378 K**（計算 2.1）：ラムダ点の **1.439902** 倍。
4. 密度 10 倍で **4.641589** 倍（計算 2.2）：10 の 2/3 乗。
5. 位相空間密度は **2.6123753487**（計算 3.1）：三つで 10 桁一致。
6. 波長は間隔の **1.377247** 倍（計算 3.2）：越えたところが境目。
7. 1 μK では **0.656752**（計算 3.2）：まだ届かない。
8. $T/T_c = 0.5$ で **0.646447**（計算 3.4）：凝縮した割合。
9. 切っても消えない（観察 4.1）：分離子。
10. 論文482 の席（観察 4.2）：同じ理想気体の別の側。

結び：凝縮は、粒子どうしが引き合うから起きるのではない。理想ボース気体の凝縮温度の式に入っているのは定数と質量と数密度だけで、それでも Rb87 で 398.3307 nK、液体ヘリウムの密度で 3.134378 K という具体的な温度が出た。その温度では、質量も密度も大きく違う三つの場合が、同じ位相空間密度 2.6123753487 を返した——条件は引力の強さではなく、熱的ド・ブロイ波長が粒子間の距離を越えること（本稿の例では 1.377247 倍）である。分離子は、相互作用を切ったら消えるかである。既刊との位置——論文482 が「凝縮そのものは論じない」と空けた席で、その条件を数えた。正直に言えば——ラムダ点との 1.439902 倍の差は相互作用の効きであり、本稿はその大きさを説明していない。

参考文献

1. Anderson, M. H., Ensher, J. R., Matthews, M. R., Wieman, C. E., & Cornell, E. A. (1995). Observation of Bose--Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor. Science.
2. Einstein, A. (1925). Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. Zweite Abhandlung. Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften.
3. Pethick, C. J., & Smith, H. (2008). *Bose--Einstein Condensation in Dilute Gases*. Cambridge University Press.
4. 山岸勇輝 (2026). 『「臨界次元」という同じ語が、上と下で別の数を指している』[論文482]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22759625

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)