

# Der Ursprung des $4\pi$ -Patches in der Euler-Charakteristik

$m = 4\pi$  als  $2\pi\chi(S^2)$  gelesen, über Poincaré–Hopf

— Ein topologischer Anker für die Yamagishi-Raumwinkelkonstante — [Aufsatz 67]

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan

September 2026 (Zweite Auflage)

— *From thinking to syncing.* —

## Zusammenfassung

Die Konstante  $4\pi$  — der gesamte Raumwinkel der 2-Sphäre und die Grenzmasse  $m = 4\pi$  aus Aufsatz 01 — verankert das ganze Yamagishi-System. Dieser Aufsatz stellt fest, dass  $4\pi$  nicht bloß eine geometrische, sondern eine **topologische** Größe ist: Nach dem Satz von Gauß–Bonnet gilt  $\int_{S^2} K dA = 2\pi\chi(S^2)$ , und nach dem Satz von Poincaré–Hopf ist die Euler-Charakteristik  $\chi(S^2) = 2$  allein durch die Topologie festgelegt (der Gesamtindex jedes Vektorfeldes auf  $S^2$  ist 2; „man kann den Igel nicht kämmen“). Daher gilt

$$4\pi = \int_{S^2} K dA = 2\pi\chi(S^2) = 2\pi \times 2, \quad \text{also} \quad m = 4\pi = 2\pi\chi(S^2).$$

Die „2“ in  $4\pi = 2\pi \cdot 2$  ist genau die Euler-Charakteristik der Sphäre. Wir halten drei Folgerungen fest: (i) die Grundkonstante des Systems hat einen topologischen Ursprung, ihr Wert ist also erzwungen, nicht gewählt; (ii) der topologische Anker existiert nur in **geraden** Sphärendimensionen, da  $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$  für ungerade  $n$  verschwindet — ein Echo der Gerade/Ungerade-Aufteilung aus Aufsatz 57; (iii) in höheren geraden Dimensionen ist derselbe Anker der Satz von Chern–Gauß–Bonnet, der an die Normierung  $(4\pi)^n n!$  aus Aufsatz 48 anschließt. Wir sagen ausdrücklich, dass dies eine Neulesung einer bekannten Konstante ist, keine Herleitung neuer Physik, und dass die metrikunabhängige Invariante das Krümmungsintegral  $\int K dA$  ist, das die runde Einheitssphäre als ihre Fläche  $4\pi$  verwirklicht.

**Schlüsselwörter:** Raumwinkel, Euler-Charakteristik, Satz von Poincaré–Hopf, Gauß–Bonnet, Satz vom Igel,  $4\pi$ , topologische Invariante, strukturelle Deutung.

## 1. Einleitung

Aufsatz 01 stellte die Grenzmasse  $m = 4\pi$ , den reinen gesamten Raumwinkel des dreidimensionalen Raumes, als Anker des Yamagishi-Systems auf. Eine naheliegende Frage ist, ob der Wert  $4\pi$  beliebig — ein bloßer geometrischer Zufall — oder erzwungen ist. Dieser Aufsatz antwortet: Er ist **erzwungen, und der Zwang ist topologisch**.

Der Weg ist bewusst gewählt. In früheren Arbeiten (Forschungsnotizen zu Aufsatz 15) wurde eine verlockende Brücke vom atomaren „ $16\pi^2$ “ zum Instanton-„ $16\pi^2$ “ der Hopf-Faserung geprüft und als **nicht tragfähig** befunden: Masse und Spin sind unabhängige Casimir-Operatoren der Poincaré-Gruppe, sodass die beiden  $16\pi^2$  verschiedene Wurzeln haben. Der vorliegende Aufsatz erreicht Hopf daher durch eine andere, tragfähige Tür: die **Euler-Charakteristik**, über den Satz von Poincaré–Hopf. Durch diese Tür ist die Verbindung kein Zusammentreffen von Zahlen, sondern die Identität einer wohldefinierten topologischen Invariante.

**Was dieser Aufsatz nicht tut.** Er verändert die Physik nicht, leitet nicht her, dass die Masse  $4\pi$  sein „muss“ (die Raumwinkeldarstellung bleibt eine Wahl), und sagt nichts Neues voraus. Er zeigt, dass der **Wert** des Raumwinkels topologisch ist.

## 2. Drei gesicherte Tatsachen

---

### 2.1 Der gesamte Raumwinkel ist $4\pi$

Der gesamte Raumwinkel, der von einem Punkt in  $\mathbb{R}^3$  aus aufgespannt wird, ist

$$\Omega = \int_{S^2} d\Omega = \text{area}(S^2_{\text{unit}}) = 4\pi, \quad (1)$$

die Fläche der Einheits-2-Sphäre. Das ist das  $m = 4\pi$  aus Aufsatz 01.

### 2.2 Gauß–Bonnet: Krümmungsintegral = $2\pi\chi$

Für eine geschlossene orientierte Riemannsche Fläche  $M$  gilt

$$\int_M K dA = 2\pi \chi(M), \quad (2)$$

wobei  $K$  die Gaußsche Krümmung und  $\chi(M)$  die Euler-Charakteristik ist. Für die Einheitssphäre ist  $K \equiv 1$ , also  $\int_{S^2} K dA = \text{area}(S^2) = 4\pi$ , was  $2\pi\chi(S^2) = 4\pi$  ergibt.

### 2.3 Poincaré–Hopf: $\chi(S^2) = 2$ ist topologisch

Der Satz von Poincaré–Hopf besagt, dass für jedes glatte Vektorfeld  $v$  mit isolierten Nullstellen auf einer kompakten Mannigfaltigkeit  $M$  gilt

$$\sum_{p: v(p)=0} \text{index}(v; p) = \chi(M). \quad (3)$$

Für  $S^2$  ist der Gesamtindex **2**: **jedes** Vektorfeld auf der Sphäre muss irgendwo verschwinden (der „Satz vom Igel“ — man kann die Haare auf einer Kugel nicht ohne Wirbel kämmen), und die Indizes summieren sich zu **2**. Entscheidend ist, dass (3) von jeder Metrik unabhängig ist:  $\chi(S^2) = 2$  ist allein durch die Topologie festgelegt.

### 3. Die Zusammenführung

#### Proposition 3.1 (Topologischer Wert des Raumwinkel-Patches)

Der gesamte Raumwinkel der **2**-Sphäre erfüllt

$$4\pi = \int_{S^2} K dA = 2\pi \chi(S^2) = 2\pi \times 2, \quad (4)$$

wobei  $\chi(S^2) = 2$  durch den Satz von Poincaré–Hopf (3) unabhängig von der Metrik festgelegt ist. Folglich ist der Yamagishi-Patch

$$\boxed{m = 4\pi = 2\pi \chi(S^2)}. \quad (5)$$

#### *Beweis.*

Nach Poincaré–Hopf (3) ist  $\chi(S^2) = 2$ . Nach Gauß–Bonnet (2) ist  $\int_{S^2} K dA = 2\pi \chi(S^2) = 4\pi$ . Für die runde Einheitssphäre ist  $K \equiv 1$ , und das Krümmungsintegral ist gleich der Fläche (1), also dem gesamten Raumwinkel  $4\pi$ .

Daher gilt  $4\pi = 2\pi \chi(S^2)$  und  $m = 4\pi = 2\pi \chi(S^2)$ . ■

Der Gehalt ist eine Lesart: Die „**2**“ in  $4\pi = 2\pi \cdot 2$  ist **die Euler-Charakteristik der Sphäre**, und sie ist eine topologische Zahl, kein geometrischer Zufall. Die runde Sphäre ( $K \equiv 1$ ) ist der Vertreter, für den die metrikunabhängige Invariante  $\int K dA = 2\pi \chi$  als Fläche  $4\pi$  verwirklicht wird, d. h. als gesamter Raumwinkel.

### 4. Gerade/ungerade Dimensionen und die höhere Leiter

Die Euler-Charakteristik der  $n$ -Sphäre ist

$$\chi(S^n) = 1 + (-1)^n = \begin{cases} 2, & n \text{ even,} \\ 0, & n \text{ odd.} \end{cases} \quad (6)$$

Der topologische Anker aus Proposition 3.1 existiert daher **nur in geraden Sphärendimensionen**; in ungeraden Dimensionen verschwindet die Euler-Charakteristik. Dies ist ein Echo der Gerade/Ungerade-Aufteilung, die in Aufsatz 57 beobachtet wurde, wo  $(4\pi)^{d/2}$  ganzzahlige Potenzen von  $\pi$  bei geradem  $d$  und halbzahlige Potenzen bei ungeradem  $d$  trägt: Der „saubere“ topologische Gehalt liegt in beiden Lesarten bei geraden Dimensionen.

#### Korollar 4.1 (Höherdimensionaler Anker)

In  $2n$  Dimensionen ist das Analogon zu (2) der Satz von Chern–Gauß–Bonnet,

$$\int_{M^{2n}} \text{Pf}\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right) = \chi(M^{2n}),$$

dessen Normierung die in Aufsatz 48 entpackte Konstante  $(4\pi)^n n!$  ist. Die hier gegebene topologische Lesart von  $4\pi$  ist der Grundfall  $d = 2$  dieser Hierarchie.

Wir behaupten hier nicht mehr als die arithmetische Identität: Wie in Aufsatz 48 dürfen verschiedene Normierungskonstanten nicht leichtfertig gleichgesetzt werden. Die Aussage ist nur, dass die Basis der Leiter,  $4\pi$ , gleich  $2\pi\chi(S^2)$  ist.

## 5. Tragweite der Behauptungen

### Was gesichert ist:

1.  $4\pi = 2\pi\chi(S^2)$  mit  $\chi(S^2) = 2$ , topologisch festgelegt durch Poincaré–Hopf; daher  $m = 4\pi = 2\pi\chi(S^2)$  (Proposition 3.1).
2. Der topologische Anker existiert nur in geraden Sphärendimensionen,  $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$ , als Echo von Aufsatz 57 (Abschnitt 4).
3. Der höherdimensionale Anker ist Chern–Gauß–Bonnet, dessen Normierung  $(4\pi)^n n!$  Aufsatz 48 ist (Korollar 4.1).

### Was nicht gesichert / nicht behauptet ist:

- Keine neue Physik oder Vorhersage. Dies ist eine topologische Neulesung einer bekannten Konstante.
- Dass die Masse  $4\pi$  sein „muss“. Die Raumwinkeldarstellung ( $m = 4\pi$ ) bleibt eine Darstellungswahl; nur der **Wert** des Raumwinkels wird als topologisch gezeigt.
- Keine Gleichsetzung über die Brücke Masse–Instanton „ $16\pi^2$ “, die verschieden bleibt (Notiz zu Aufsatz 15). Dieser Aufsatz benutzt nur die Tür der Euler-Charakteristik.

**Bemerkung zu den beiden „ $4\pi$ “.** Der Raumwinkel  $\int d\Omega$  (Fläche der runden Einheitssphäre) und die topologische Größe  $2\pi\chi(S^2)$  fallen zusammen, weil die runde Sphäre  $K \equiv 1$  hat; die metrikunabhängige Invariante ist das Krümmungsintegral  $\int K dA$ . In genau diesem Sinne ist der Patch-Wert  $4\pi$  topologisch.

## 6. Schluss

---

Die Konstante  $4\pi$ , die das Yamagishi-System verankert, ist  $2\pi\chi(S^2)$ : Der gesamte Raumwinkel ist gleich  $2\pi$  mal der Euler-Charakteristik der Sphäre, und  $\chi(S^2) = 2$  ist — unabhängig von jeder Metrik — durch den Satz von Poincaré–Hopf festgelegt. Der Grundwert ist daher topologisch und nicht beliebig, und die „2“ in  $4\pi = 2\pi \cdot 2$  ist die Euler-Charakteristik. Der Anker ist nur in geraden Dimensionen vorhanden ( $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$ ) und verallgemeinert sich über Chern–Gauß–Bonnet zur Leiter  $(4\pi)^n n!$  aus Aufsatz 48. Dies erreicht Hopf durch die Tür der Euler-Charakteristik und hält sich vom verschiedenen  $16\pi^2$  von Masse und Instanton fern. Es wird keine neue Physik beansprucht; einer bekannten Konstante wird eine topologische Lesart gegeben.

## Revisionsprotokoll

---

**Zweite Auflage (September 2026): Keine Aussage, kein Satz und keine Nachrechnung wurde gegenüber der ersten Auflage verändert.** Die deutsche, französische und italienische Fassung wurden hinzugefügt. Die Literaturangaben, die frühere Aufsätze dieses Korpus zitieren, nennen nun **die tatsächlichen Titel der zitierten Aufsätze im aktuellen Format** (Aufsatznummer und DOI nach dem Titel); die erste Auflage hatte die Titel verkürzt. Die Aufsatznummer steht nun in der Titelzeile, und die DOI wurde aus der Datumszeile entfernt. Der im Text zitierte Aufsatz 15 wurde in die Literaturangaben aufgenommen. **Inhaltlich hat sich nichts geändert, und nichts wurde zurückgezogen.**

## Literatur

---

1. Gauss, C. F. (1827). *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Göttingen.
2. Bonnet, O. (1848). *Mémoire sur la théorie générale des surfaces*. J. École Polytechnique, 19, 1–146.
3. Poincaré, H. (1885). *Sur les courbes définies par les équations différentielles*. J. Math. Pures Appl.
4. Hopf, H. (1926). *Vektorfelder in  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten*. Math. Ann., 96, 225–249.
5. Chern, S.-S. (1944). *A simple intrinsic proof of the Gauss–Bonnet formula for closed Riemannian manifolds*. Ann. Math., 45, 747–752.
6. Milnor, J. W. (1965). *Topology from the Differentiable Viewpoint*. University Press of Virginia.
7. Yamagishi, Y. (2026). *The Uniqueness Theorem of  $n = 2$  for Spherically Symmetric Density Distributions* [Aufsatz 01]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186
8. Yamagishi, Y. (2026). *A Convention Is a Number, Not a Function of the Configuration* [Aufsatz 15]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600352
9. Yamagishi, Y. (2026). *The Pfaffian's  $2^n n!$  Is One Block* [Aufsatz 48]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602525

10. Yamagishi, Y. (2026). *A Kaluza–Klein Re-entry* [Aufsatz 57]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21597608

---

— *From thinking to syncing.* —

**Yuuki YAMAGISHI** (山岸 勇輝)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)