

L'origine du patch 4π dans la caractéristique d'Euler

Lire $m = 4\pi$ comme $2\pi\chi(S^2)$ via Poincaré–Hopf

— Un ancrage topologique pour la constante d'angle solide de Yamagishi — [Article 67]

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japon

Septembre 2026 (Deuxième édition)

— *From thinking to syncing.* —

Résumé

La constante 4π — l'angle solide total de la sphère de dimension 2 et la masse limite $m = 4\pi$ de l'Article 01 — ancre tout le système de Yamagishi. Cet article observe que 4π n'est pas seulement une grandeur géométrique mais une grandeur **topologique** : par le théorème de Gauss–Bonnet, $\int_{S^2} K dA = 2\pi\chi(S^2)$, et par le théorème de Poincaré–Hopf la caractéristique d'Euler $\chi(S^2) = 2$ est fixée par la seule topologie (l'indice total de tout champ de vecteurs sur S^2 vaut 2 ; « on ne peut pas peigner une sphère chevelue »). Donc

$$4\pi = \int_{S^2} K dA = 2\pi\chi(S^2) = 2\pi \times 2, \quad \text{donc} \quad m = 4\pi = 2\pi\chi(S^2).$$

Le « 2 » de $4\pi = 2\pi \cdot 2$ est exactement la caractéristique d'Euler de la sphère. Nous consignons trois conséquences : (i) la constante fondamentale du système a une origine topologique, sa valeur est donc imposée, non choisie ; (ii) l'ancrage topologique n'existe qu'en dimensions de sphère **paires**, puisque $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$ s'annule pour n impair — écho de la séparation pair/impair de l'Article 57 ; (iii) en dimensions paires supérieures, le même ancrage est le théorème de Chern–Gauss–Bonnet, qui rejoint la normalisation $(4\pi)^n n!$ de l'Article 48. Nous précisons explicitement qu'il s'agit d'une relecture d'une constante connue, non de la dérivation d'une physique nouvelle, et que l'invariant indépendant de la métrique est l'intégrale de courbure $\int K dA$, que la sphère unité ronde réalise comme son aire 4π .

Mots-clés : angle solide, caractéristique d'Euler, théorème de Poincaré–Hopf, Gauss–Bonnet, théorème de la boule chevelue, 4π , invariant topologique, interprétation structurelle.

1. Introduction

L'Article 01 a établi la masse limite $m = 4\pi$, l'angle solide total pur de l'espace à trois dimensions, comme ancrage du système de Yamagishi. Une question naturelle est de savoir si la valeur 4π est arbitraire — un simple hasard géométrique — ou imposée. Cet article répond : elle est **imposée, et la contrainte est topologique**.

Le chemin est délibéré. Dans des travaux antérieurs (notes de recherche sur l’Article 15), un pont tentant du « $16\pi^2$ » atomique vers le « $16\pi^2$ » instantonique de la fibration de Hopf a été examiné et jugé **non valable** : la masse et le spin sont des invariants de Casimir indépendants du groupe de Poincaré, de sorte que les deux $16\pi^2$ ont des racines distinctes. Le présent article rejoint donc Hopf par une autre porte, solide : la **caractéristique d’Euler**, via le théorème de Poincaré–Hopf. Par cette porte, la connexion n’est pas une coïncidence de nombres mais l’identité d’un invariant topologique bien défini.

Ce que cet article ne fait pas. Il ne modifie pas la physique, ne dérive pas que la masse « doit » valoir 4π (la représentation par l’angle solide reste un choix), et ne prédit rien de nouveau. Il montre que la **valeur** de l’angle solide est topologique.

2. Trois faits établis

2.1 L’angle solide total vaut 4π

L’angle solide total sous-tendu en un point de $\mathbb{R}^3$ est

$$\Omega = \int_{S^2} d\Omega = \text{area}(S^2_{\text{unit}}) = 4\pi, \quad (1)$$

l’aire de la sphère unité de dimension **2**. C’est le $m = 4\pi$ de l’Article 01.

2.2 Gauss–Bonnet : intégrale de courbure = $2\pi\chi$

Pour une surface riemannienne fermée orientée M ,

$$\int_M K dA = 2\pi\chi(M), \quad (2)$$

où K est la courbure de Gauss et $\chi(M)$ la caractéristique d’Euler. Pour la sphère unité, $K \equiv 1$, donc $\int_{S^2} K dA = \text{area}(S^2) = 4\pi$, ce qui donne $2\pi\chi(S^2) = 4\pi$.

2.3 Poincaré–Hopf : $\chi(S^2) = 2$ est topologique

Le théorème de Poincaré–Hopf énonce que, pour tout champ de vecteurs lisse v à zéros isolés sur une variété compacte M ,

$$\sum_{p: v(p)=0} \text{index}(v; p) = \chi(M). \quad (3)$$

Pour S^2 , l’indice total vaut **2** : **tout** champ de vecteurs sur la sphère doit s’annuler quelque part (le « théorème de la boule chevelue » — on ne peut pas peigner les cheveux d’une sphère sans épi), et les indices ont pour somme **2**. Point crucial, (3) est indépendant de toute métrique : $\chi(S^2) = 2$ est fixé par la seule topologie.

3. La synthèse

Proposition 3.1 (Valeur topologique du patch d'angle solide)

L'angle solide total de la sphère de dimension **2** satisfait

$$4\pi = \int_{S^2} K dA = 2\pi \chi(S^2) = 2\pi \times 2, \quad (4)$$

où $\chi(S^2) = 2$ est fixé par le théorème de Poincaré–Hopf (3) indépendamment de la métrique. Par conséquent, le patch de Yamagishi est

$$\boxed{m = 4\pi = 2\pi \chi(S^2)}. \quad (5)$$

Démonstration.

Par Poincaré–Hopf (3), $\chi(S^2) = 2$. Par Gauss–Bonnet (2), $\int_{S^2} K dA = 2\pi \chi(S^2) = 4\pi$. Pour la sphère unité ronde, $K \equiv 1$, et l'intégrale de courbure est égale à l'aire (1), qui est l'angle solide total 4π . Donc $4\pi = 2\pi \chi(S^2)$ et $m = 4\pi = 2\pi \chi(S^2)$. ■

Le contenu est une lecture : le « **2** » de $4\pi = 2\pi \cdot 2$ est la **caractéristique d'Euler de la sphère**, et c'est un nombre topologique, non un accident géométrique. La sphère ronde ($K \equiv 1$) est le représentant pour lequel l'invariant indépendant de la métrique $\int K dA = 2\pi \chi$ est réalisé comme l'aire 4π , c'est-à-dire comme l'angle solide total.

4. Dimensions paires/impaires et l'échelle supérieure

La caractéristique d'Euler de la sphère de dimension n est

$$\chi(S^n) = 1 + (-1)^n = \begin{cases} 2, & n \text{ even,} \\ 0, & n \text{ odd.} \end{cases} \quad (6)$$

L'ancrage topologique de la Proposition 3.1 n'existe donc **qu'en dimensions de sphère paires** ; en dimensions impaires, la caractéristique d'Euler s'annule. Cela fait écho à la séparation pair/impair observée dans l'Article 57, où $(4\pi)^{d/2}$ porte des puissances entières de π pour d pair et demi-entières pour d impair : le contenu topologique « propre » se trouve aux dimensions paires dans les deux lectures.

Corollaire 4.1 (Ancrage en dimension supérieure)

En $2n$ dimensions, l'analogie de (2) est le théorème de Chern–Gauss–Bonnet,

$$\int_{M^{2n}} \text{Pf}\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right) = \chi(M^{2n}),$$

dont la normalisation est la constante $(4\pi)^n n!$ décomposée dans l'Article 48. La lecture topologique de 4π donnée ici est le cas de base $d = 2$ de cette hiérarchie.

Nous n'affirmons ici rien de plus que l'identité arithmétique : comme dans l'Article 48, des constantes de normalisation distinctes ne doivent pas être identifiées à la légère. L'énoncé est seulement que la base de l'échelle, 4π , est $2\pi\chi(S^2)$.

5. Portée des affirmations

Ce qui est établi :

1. $4\pi = 2\pi\chi(S^2)$ avec $\chi(S^2) = 2$ fixé topologiquement par Poincaré–Hopf ; donc $m = 4\pi = 2\pi\chi(S^2)$ (Proposition 3.1).
2. L'ancrage topologique n'existe qu'en dimensions de sphère paires, $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$, en écho à l'Article 57 (section 4).
3. L'ancrage en dimension supérieure est Chern–Gauss–Bonnet, dont la normalisation $(4\pi)^n n!$ est l'Article 48 (Corollaire 4.1).

Ce qui n'est pas établi / pas affirmé :

- Aucune physique ni prédiction nouvelle. Il s'agit d'une relecture topologique d'une constante connue.
- Que la masse « doive » valoir 4π . La représentation par l'angle solide ($m = 4\pi$) reste un choix de représentation ; seule la **valeur** de l'angle solide est montrée topologique.
- Aucune identification via le pont masse–instanton « $16\pi^2$ », qui reste distinct (note sur l'Article 15). Cet article n'utilise que la porte de la caractéristique d'Euler.

Remarque sur les deux « 4π ». L'angle solide $\int d\Omega$ (aire de la sphère unité ronde) et la grandeur topologique $2\pi\chi(S^2)$ coïncident parce que la sphère ronde a $K \equiv 1$; l'invariant indépendant de la métrique est l'intégrale de courbure $\int K dA$. C'est en ce sens précis que la valeur du patch, 4π , est topologique.

6. Conclusion

La constante 4π qui ancre le système de Yamagishi est $2\pi\chi(S^2)$: l'angle solide total est égal à 2π fois la caractéristique d'Euler de la sphère, et $\chi(S^2) = 2$ est fixé — indépendamment de toute métrique — par le théorème de Poincaré–Hopf. La valeur fondamentale est donc topologique, et non arbitraire, et le « 2 » de $4\pi = 2\pi \cdot 2$ est la caractéristique d'Euler. L'ancrage n'est présent qu'aux dimensions paires ($\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$) et se généralise, via Chern–Gauss–Bonnet, à l'échelle $(4\pi)^n n!$ de l'Article 48. Cela rejoint Hopf par la porte de la caractéristique d'Euler, en se tenant à l'écart du $16\pi^2$ distinct de la masse et de l'instanton. Aucune physique nouvelle n'est revendiquée ; une lecture topologique est donnée à une constante connue.

Registre des révisions

Deuxième édition (septembre 2026) : aucune affirmation, aucun théorème ni aucune vérification n'a été modifié par rapport à la première édition. Les versions allemande, française et italienne ont été ajoutées. Les références qui citent des articles antérieurs de ce corpus donnent désormais **les titres réels des articles cités dans le format actuel** (numéro d'article et DOI après le titre) ; la première édition avait abrégé les titres. Le numéro de l'article a été placé sur la ligne du titre, et le DOI a été retiré de la ligne de date. L'article 15, cité dans le texte, a été ajouté aux références. **Rien de substantiel n'a changé, et rien n'a été retiré.**

Références

1. Gauss, C. F. (1827). *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Göttingen.
2. Bonnet, O. (1848). *Mémoire sur la théorie générale des surfaces*. J. École Polytechnique, 19, 1–146.
3. Poincaré, H. (1885). *Sur les courbes définies par les équations différentielles*. J. Math. Pures Appl.
4. Hopf, H. (1926). *Vektorfelder in n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten*. Math. Ann., 96, 225–249.
5. Chern, S.-S. (1944). *A simple intrinsic proof of the Gauss–Bonnet formula for closed Riemannian manifolds*. Ann. Math., 45, 747–752.
6. Milnor, J. W. (1965). *Topology from the Differentiable Viewpoint*. University Press of Virginia.
7. Yamagishi, Y. (2026). *The Uniqueness Theorem of $n = 2$ for Spherically Symmetric Density Distributions* [Article 01]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186
8. Yamagishi, Y. (2026). *A Convention Is a Number, Not a Function of the Configuration* [Article 15]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600352
9. Yamagishi, Y. (2026). *The Pfaffian's $2^n n!$ Is One Block* [Article 48]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602525

10. Yamagishi, Y. (2026). *A Kaluza–Klein Re-entry* [Article 57]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21597608

— *From thinking to syncing.* —

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)