

L'origine del patch 4π nella caratteristica di Eulero

Leggere $m = 4\pi$ come $2\pi\chi(S^2)$ tramite Poincaré–Hopf

— Un ancoraggio topologico per la costante di angolo solido di Yamagishi — [Articolo 67]

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Giappone

Settembre 2026 (Seconda edizione)

— *From thinking to syncing.* —

Sommario

La costante 4π — l'angolo solido totale della sfera di dimensione 2 e la massa limite $m = 4\pi$ dell'Articolo 01 — ancora l'intero sistema di Yamagishi. Questo articolo osserva che 4π non è soltanto una grandezza geometrica ma una grandezza **topologica**: per il teorema di Gauss–Bonnet, $\int_{S^2} K dA = 2\pi\chi(S^2)$, e per il teorema di Poincaré–Hopf la caratteristica di Eulero $\chi(S^2) = 2$ è fissata dalla sola topologia (l'indice totale di qualsiasi campo vettoriale su S^2 vale 2 ; «non si può pettinare una sfera pelosa»). Quindi

$$4\pi = \int_{S^2} K dA = 2\pi\chi(S^2) = 2\pi \times 2, \quad \text{quindi} \quad m = 4\pi = 2\pi\chi(S^2).$$

Il « 2 » in $4\pi = 2\pi \cdot 2$ è esattamente la caratteristica di Eulero della sfera. Registriamo tre conseguenze: (i) la costante fondamentale del sistema ha un'origine topologica, perciò il suo valore è imposto, non scelto; (ii) l'ancoraggio topologico esiste solo in dimensioni di sfera **pari**, poiché $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$ si annulla per n dispari — eco della separazione pari/dispari dell'Articolo 57; (iii) nelle dimensioni pari superiori, lo stesso ancoraggio è il teorema di Chern–Gauss–Bonnet, che si ricollega alla normalizzazione $(4\pi)^n n!$ dell'Articolo 48. Precisiamo esplicitamente che si tratta di una rilettura di una costante nota, non della derivazione di una fisica nuova, e che l'invariante indipendente dalla metrica è l'integrale di curvatura $\int K dA$, che la sfera unitaria rotonda realizza come la propria area 4π .

Parole chiave: angolo solido, caratteristica di Eulero, teorema di Poincaré–Hopf, Gauss–Bonnet, teorema della palla pelosa, 4π , invariante topologico, interpretazione strutturale.

1. Introduzione

L'Articolo 01 ha stabilito la massa limite $m = 4\pi$, l'angolo solido totale puro dello spazio tridimensionale, come ancoraggio del sistema di Yamagishi. Una domanda naturale è se il valore 4π sia arbitrario — un semplice caso geometrico — oppure imposto. Questo articolo risponde: è **imposto**, e il vincolo è **topologico**.

Il percorso è deliberato. In lavori precedenti (note di ricerca sull'Articolo 15), un ponte allettante dal «**16 π^2** » atomico al «**16 π^2** » istantonico della fibrazione di Hopf è stato esaminato e giudicato **non valido**: massa e spin sono invarianti di Casimir indipendenti del gruppo di Poincaré, quindi i due **16 π^2** hanno radici distinte. Il presente articolo raggiunge perciò Hopf attraverso un'altra porta, solida: la **caratteristica di Eulero**, tramite il teorema di Poincaré–Hopf. Attraverso questa porta, il collegamento non è una coincidenza di numeri ma l'identità di un invariante topologico ben definito.

Che cosa questo articolo non fa. Non modifica la fisica, non deriva che la massa «debba» valere **4 π** (la rappresentazione con l'angolo solido resta una scelta) e non predice nulla di nuovo. Mostra che il **valore** dell'angolo solido è topologico.

2. Tre fatti consolidati

2.1 L'angolo solido totale vale **4 π**

L'angolo solido totale sotteso in un punto di $\mathbb{R}^3$ è

$$\Omega = \int_{S^2} d\Omega = \text{area}(S^2_{\text{unit}}) = 4\pi, \quad (1)$$

l'area della sfera unitaria di dimensione **2**. È il **m = 4 π** dell'Articolo 01.

2.2 Gauss–Bonnet: integrale di curvatura = **2 $\pi\chi$**

Per una superficie riemanniana chiusa e orientata **M**,

$$\int_M K dA = 2\pi \chi(M), \quad (2)$$

dove **K** è la curvatura di Gauss e $\chi(M)$ la caratteristica di Eulero. Per la sfera unitaria, **K** $\equiv$ **1**, quindi $\int_{S^2} K dA = \text{area}(S^2) = 4\pi$, il che dà $2\pi\chi(S^2) = 4\pi$.

2.3 Poincaré–Hopf: $\chi(S^2) = 2$ è topologico

Il teorema di Poincaré–Hopf afferma che, per ogni campo vettoriale liscio **v** con zeri isolati su una varietà compatta **M**,

$$\sum_{p: v(p)=0} \text{index}(v; p) = \chi(M). \quad (3)$$

Per **S²** l'indice totale vale **2**: **ogni** campo vettoriale sulla sfera deve annullarsi da qualche parte (il «teorema della palla pelosa» — non si possono pettinare i capelli di una sfera senza un vortice), e gli indici hanno somma **2**. Punto cruciale, (3) è indipendente da qualsiasi metrica: $\chi(S^2) = 2$ è fissato dalla sola topologia.

3. La sintesi

Proposizione 3.1 (Valore topologico del patch di angolo solido)

L'angolo solido totale della sfera di dimensione **2** soddisfa

$$4\pi = \int_{S^2} K dA = 2\pi \chi(S^2) = 2\pi \times 2, \quad (4)$$

dove $\chi(S^2) = 2$ è fissato dal teorema di Poincaré–Hopf (3) indipendentemente dalla metrica. Di conseguenza, il patch di Yamagishi è

$$\boxed{m = 4\pi = 2\pi \chi(S^2)}. \quad (5)$$

Dimostrazione.

Per Poincaré–Hopf (3), $\chi(S^2) = 2$. Per Gauss–Bonnet (2), $\int_{S^2} K dA = 2\pi \chi(S^2) = 4\pi$. Per la sfera unitaria rotonda, $K \equiv 1$, e l'integrale di curvatura è uguale all'area (1), che è l'angolo solido totale 4π . Quindi $4\pi = 2\pi \chi(S^2)$ e $m = 4\pi = 2\pi \chi(S^2)$. ■

Il contenuto è una lettura: il «**2**» in $4\pi = 2\pi \cdot 2$ è la **caratteristica di Eulero della sfera**, ed è un numero topologico, non un accidente geometrico. La sfera rotonda ($K \equiv 1$) è il rappresentante per cui l'invariante indipendente dalla metrica $\int K dA = 2\pi \chi$ si realizza come l'area 4π , cioè come l'angolo solido totale.

4. Dimensioni pari/dispari e la scala superiore

La caratteristica di Eulero della sfera di dimensione n è

$$\chi(S^n) = 1 + (-1)^n = \begin{cases} 2, & n \text{ even,} \\ 0, & n \text{ odd.} \end{cases} \quad (6)$$

L'ancoraggio topologico della Proposizione 3.1 esiste quindi **solo in dimensioni di sfera pari**; nelle dimensioni dispari la caratteristica di Eulero si annulla. Ciò fa eco alla separazione pari/dispari osservata nell'Articolo 57, dove $(4\pi)^{d/2}$ porta potenze intere di π per d pari e semi-interi per d dispari: il contenuto topologico «pulito» si trova nelle dimensioni pari in entrambe le letture.

Corollario 4.1 (Ancoraggio in dimensione superiore)

In $2n$ dimensioni, l'analogo di (2) è il teorema di Chern–Gauss–Bonnet,

$$\int_{M^{2n}} \text{Pf}\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right) = \chi(M^{2n}),$$

la cui normalizzazione è la costante $(4\pi)^n n!$ scomposta nell'Articolo 48. La lettura topologica di 4π data qui è il caso base $d = 2$ di questa gerarchia.

Qui non affermiamo nulla di più dell'identità aritmetica: come nell'Articolo 48, costanti di normalizzazione distinte non vanno identificate con leggerezza. L'enunciato è soltanto che la base della scala, 4π , è $2\pi\chi(S^2)$.

5. Portata delle affermazioni

Che cosa è stabilito:

1. $4\pi = 2\pi\chi(S^2)$ con $\chi(S^2) = 2$ fissato topologicamente da Poincaré–Hopf; quindi $m = 4\pi = 2\pi\chi(S^2)$ (Proposizione 3.1).
2. L'ancoraggio topologico esiste solo in dimensioni di sfera pari, $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$, in eco all'Articolo 57 (sezione 4).
3. L'ancoraggio in dimensione superiore è Chern–Gauss–Bonnet, la cui normalizzazione $(4\pi)^n n!$ è l'Articolo 48 (Corollario 4.1).

Che cosa non è stabilito / non è affermato:

- Nessuna fisica né previsione nuova. Si tratta di una rilettura topologica di una costante nota.
- Che la massa «debba» valere 4π . La rappresentazione con l'angolo solido ($m = 4\pi$) resta una scelta di rappresentazione; soltanto il **valore** dell'angolo solido è mostrato come topologico.
- Nessuna identificazione tramite il ponte massa–istantone « $16\pi^2$ », che resta distinto (nota sull'Articolo 15). Questo articolo usa soltanto la porta della caratteristica di Eulero.

Osservazione sui due « 4π ». L'angolo solido $\int d\Omega$ (area della sfera unitaria rotonda) e la grandezza topologica $2\pi\chi(S^2)$ coincidono perché la sfera rotonda ha $K \equiv 1$; l'invariante indipendente dalla metrica è l'integrale di curvatura $\int K dA$. È in questo senso preciso che il valore del patch, 4π , è topologico.

6. Conclusione

La costante 4π che ancora il sistema di Yamagishi è $2\pi\chi(S^2)$: l'angolo solido totale è uguale a 2π volte la caratteristica di Eulero della sfera, e $\chi(S^2) = 2$ è fissato — indipendentemente da qualsiasi metrica — dal teorema di Poincaré–Hopf. Il valore fondamentale è dunque topologico, non arbitrario, e il «2» in $4\pi = 2\pi \cdot 2$ è la caratteristica di Eulero. L'ancoraggio è presente solo nelle dimensioni pari ($\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$) e si generalizza, tramite Chern–Gauss–Bonnet, alla scala $(4\pi)^n n!$ dell'Articolo 48. Ciò raggiunge Hopf attraverso la porta della caratteristica di Eulero, tenendosi lontano dal $16\pi^2$ distinto della massa e dell'istantone. Non si rivendica alcuna fisica nuova; si dà una lettura topologica a una costante nota.

Registro delle revisioni

Seconda edizione (settembre 2026): nessuna affermazione, nessun teorema e nessuna verifica è stata modificata rispetto alla prima edizione. Sono state aggiunte le versioni tedesca, francese e italiana. I riferimenti che citano articoli precedenti di questo corpus riportano ora i **titoli effettivi degli articoli citati nel formato attuale** (numero dell'articolo e DOI dopo il titolo); la prima edizione aveva abbreviato i titoli. Il numero dell'articolo è stato spostato sulla riga del titolo e il DOI è stato tolto dalla riga della data. L'articolo 15, citato nel testo, è stato aggiunto ai riferimenti. **Nulla di sostanziale è cambiato e nulla è stato ritirato.**

Bibliografia

1. Gauss, C. F. (1827). *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Göttingen.
2. Bonnet, O. (1848). *Mémoire sur la théorie générale des surfaces*. J. École Polytechnique, 19, 1–146.
3. Poincaré, H. (1885). *Sur les courbes définies par les équations différentielles*. J. Math. Pures Appl.
4. Hopf, H. (1926). *Vektorfelder in n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten*. Math. Ann., 96, 225–249.
5. Chern, S.-S. (1944). *A simple intrinsic proof of the Gauss–Bonnet formula for closed Riemannian manifolds*. Ann. Math., 45, 747–752.
6. Milnor, J. W. (1965). *Topology from the Differentiable Viewpoint*. University Press of Virginia.
7. Yamagishi, Y. (2026). *The Uniqueness Theorem of $n = 2$ for Spherically Symmetric Density Distributions* [Articolo 01]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186
8. Yamagishi, Y. (2026). *A Convention Is a Number, Not a Function of the Configuration* [Articolo 15]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600352
9. Yamagishi, Y. (2026). *The Pfaffian's $2^n n!$ Is One Block* [Articolo 48]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602525
10. Yamagishi, Y. (2026). *A Kaluza–Klein Re-entry* [Articolo 57]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21597608

— *From thinking to syncing.* —

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)