

4π パッチのオイラー標数的起源

$m = 4\pi$ を $2\pi\chi(S^2)$ と読む — ポアンカレ=ホップの扉から
— 山岸・立体角定数の位相的な錨 — [論文67]

著者: 山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

所属: Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年9月 (第2版)

— *From thinking to syncing.* —

要旨

定数 4π ——2球面の全立体角であり、論文01の極限質量 $m = 4\pi$ ——は、山岸体系全体の錨である。本稿は、 4π が単なる幾何量ではなく位相量であることを観察する：ガウス=ボネの定理により $\int_{S^2} K dA = 2\pi\chi(S^2)$ 、そしてポアンカレ=ホップの定理により、オイラー標数 $\chi(S^2) = 2$ は位相のみによって固定される (S^2 上の任意のベクトル場の指数の総和は 2 ；「毛玉は梳かせない」)。ゆえに

$$4\pi = \int_{S^2} K dA = 2\pi\chi(S^2) = 2\pi \times 2, \quad \text{したがって} \quad m = 4\pi = 2\pi\chi(S^2).$$

$4\pi = 2\pi \cdot 2$ の「 2 」は、まさに球面のオイラー標数である。三つの帰結を記す：(i) 体系の礎の定数が位相的起源を持ち、その値は選ばれたのではなく強制される；(ii) 位相的な錨は偶数次元の球面にのみ存在する—— $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$ は奇数 n で消える——これは論文57の偶奇の分岐と呼応する；(iii) より高い偶数次元では同じ錨がチャーソン=ガウス=ボネの定理であり、論文48の $(4\pi)^n n!$ の規格化に接続する。これが既知定数の読み替えであって新しい物理の導出ではないこと、また計量に依らない不変量は曲率積分 $\int K dA$ であり、丸い単位球面はそれを面積 4π として実現すること、を明示する。

キーワード：立体角、オイラー標数、ポアンカレ=ホップの定理、ガウス=ボネ、毛玉の定理、 4π 、位相不変量、構造的解釈。

1. 序論

論文01は、3次元空間の純粋な全立体角である極限質量 $m = 4\pi$ を、山岸体系の錨として確立した。自然な問いは、値 4π が恣意的か（単なる幾何の偶然か）、それとも強制されているか、である。本稿はこう答える：強制されている。しかもその力は位相的である。

道筋は意図的である。以前の研究（論文15の研究ノート）で、原子の「 $16\pi^2$ 」から Hopf ファイブレーションのインスタントン「 $16\pi^2$ 」への魅力的な橋を検討し、それが落ちたことがある：質量とスピンはポアンカレ群の

独立なカシミールであり、二つの $16\pi^2$ は別根だからである。ゆえに本稿は、別の健全な扉から Hopf に達する：ポアンカレ＝ホップの定理を経由したオイラー標数。この扉を通れば、接続は数の偶然ではなく、明確に定義された位相不変量の一致となる。

本稿が行わないこと。物理を改変せず、質量が 4π で「なければならない」ことを導出せず（立体角表現は選択のまま）、新しい予言もしない。示すのは、立体角の値が位相的である、ということ。

2. 三つの確立された事実

2.1 全立体角は 4π

$\mathbb{R}^3$ の一点で張られる全立体角は

$$\Omega = \int_{S^2} d\Omega = \text{area}(S^2_{\text{単位}}) = 4\pi, \quad (1)$$

すなわち単位2球面の面積。これが論文01の $m = 4\pi$ である。

2.2 ガウス＝ボネ：曲率積分 = $2\pi\chi$

閉じた向き付け可能なリーマン曲面 M に対し、

$$\int_M K dA = 2\pi\chi(M), \quad (2)$$

ここで K はガウス曲率、 $\chi(M)$ はオイラー標数。単位球面では $K \equiv 1$ なので $\int_{S^2} K dA = \text{area}(S^2) = 4\pi$ 、ゆえに $2\pi\chi(S^2) = 4\pi$ 。

2.3 ポアンカレ＝ホップ： $\chi(S^2) = 2$ は位相的

ポアンカレ＝ホップの定理は、コンパクト多様体 M 上の、孤立零点を持つ任意の滑らかなベクトル場 v に対し

$$\sum_{p: v(p)=0} \text{index}(v; p) = \chi(M) \quad (3)$$

と述べる。 S^2 では総指数は **2**：球面上の任意のベクトル場は必ずどこかで消え（「毛玉の定理」——球面の毛は、つむじ無しには梳かせない）、指数の和は **2** になる。重要なのは、(3) が計量に依らないこと： $\chi(S^2) = 2$ は位相のみによって固定される。

3. 総合

命題 3.1 (立体角パッチの位相的な値)

2球面の全立体角は

$$4\pi = \int_{S^2} K dA = 2\pi\chi(S^2) = 2\pi \times 2 \quad (4)$$

を満たす。ここで $\chi(S^2) = 2$ はポアンカレ=ホップの定理 (3) により計量に依らず固定される。したがって山岸パッチは

$$m = 4\pi = 2\pi\chi(S^2). \quad (5)$$

証明

ポアンカレ=ホップ (3) より $\chi(S^2) = 2$ 。ガウス=ボネ (2) より $\int_{S^2} K dA = 2\pi\chi(S^2) = 4\pi$ 。丸い単位球面では $K \equiv 1$ なので曲率積分は面積 (1) に等しく、それが全立体角 4π である。ゆえに $4\pi = 2\pi\chi(S^2)$ 、 $m = 4\pi = 2\pi\chi(S^2)$ 。■

内容は読みである： $4\pi = 2\pi \cdot 2$ の「2」は球面のオイラー標数であり、幾何の偶然ではなく位相的な数である。丸い球面 ($K \equiv 1$) は、計量に依らない不変量 $\int K dA = 2\pi\chi$ が面積 4π ——すなわち全立体角——として実現される代表元である。

4. 偶奇の次元と、より高い階段

n 球面のオイラー標数は

$$\chi(S^n) = 1 + (-1)^n = \begin{cases} 2, & n \text{ 偶}, \\ 0, & n \text{ 奇}. \end{cases} \quad (6)$$

ゆえに命題 3.1 の位相的な錨は偶数次元の球面にのみ存在し、奇数次元ではオイラー標数が消える。これは論文57で観察された偶奇の分岐—— $(4\pi)^{d/2}$ が偶数 d で整数冪の π 、奇数 d で半整数冪——と呼応する：どちらの読みでも「清潔な」位相的内容は偶数次元に宿る。

系 4.1 (高次元の錨)

$2n$ 次元では (2) の類似がチャーン＝ガウス＝ボネの定理

$$\int_{M^{2n}} \text{Pf}\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right) = \chi(M^{2n})$$

であり、その規格化は論文48で解凍した $(4\pi)^n n!$ の定数である。本稿で与えた 4π の位相的読みは、その階層の $d = 2$ 基底に当たる。

ここで算術的な一致以上のことは主張しない：論文48と同様、異なる規格化定数を安易に同一視してはならない。言明はただ、階段の基底 4π が $2\pi\chi(S^2)$ である、というだけである。

5. 主張の射程

確立されたこと：

1. $4\pi = 2\pi\chi(S^2)$ 、 $\chi(S^2) = 2$ はポアンカレ＝ホップにより位相的に固定；ゆえに $m = 4\pi = 2\pi\chi(S^2)$ (命題 3.1)。
2. 位相的な錨は偶数次元の球面にのみ存在、 $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$ 、論文57と呼応 (第4節)。
3. 高次元の錨はチャーン＝ガウス＝ボネであり、その $(4\pi)^n n!$ 規格化は論文48 (系 4.1)。

確立されていないこと／主張しないこと：

- 新しい物理や予言。これは既知定数の位相的な読み替えである。
- 質量が 4π で「なければならない」こと。立体角表現 ($m = 4\pi$) は表現上の選択のまま；示すのは立体角の値が位相的であることのみ。
- 質量＝インスタントンの「 $16\pi^2$ 」の橋による同一視——これは別根のまま (論文15の注)。本稿はオイラー標数の扉のみを用いる。

二つの「 4π 」についての注意。立体角 $\int d\Omega$ (丸い単位球面の面積) と位相量 $2\pi\chi(S^2)$ が一致するのは、丸い球面が $K \equiv 1$ だからである；計量に依らない不変量は曲率積分 $\int K dA$ 。この精密な意味において、パッチの値 4π は位相的である。

6. 結論

山岸体系を錨づける定数 4π は $2\pi\chi(S^2)$ である：全立体角は 2π 掛ける球面のオイラー標数に等しく、 $\chi(S^2) = 2$ は——計量に依らず——ポアンカレ＝ホップの定理によって固定される。ゆえに礎の値は恣意的では

なく位相的であり、 $4\pi = 2\pi \cdot 2$ の「2」はオイラー標数である。この錨は偶数次元にのみ存在し（ $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$ ）、チャーン＝ガウス＝ボネを通じて論文48の $(4\pi)^n n!$ 階段へ一般化する。これは Hopf へオイラー標数の扉から達し、別根である質量＝インスタントンの $16\pi^2$ を避けている。新しい物理は主張せず、既知の定数に位相的な読みを与えた。

改訂記録

第2版（2026年9月）：主張・定理・検算はいずれも初版から変更していない。独・仏・伊の三言語版を加えた。あわせて、参考文献で本体系の既刊を引く行を、引く編の実際の題名と今の書式（題名のあとに論文番号と DOI）に直した——初版は題名を短くして書いていた。論文番号を題名の行へ移し、日付欄の DOI を外した。本文で引いていた論文15を参考文献に加えた。内容に関わる変更は無く、撤回した内容も無い。

参考文献

1. Gauss, C. F. (1827). *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Göttingen.
2. Bonnet, O. (1848). *Mémoire sur la théorie générale des surfaces*. J. École Polytechnique, 19, 1–146.
3. Poincaré, H. (1885). *Sur les courbes définies par les équations différentielles*. J. Math. Pures Appl.
4. Hopf, H. (1926). *Vektorfelder in n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten*. Math. Ann., 96, 225–249.
5. Chern, S.-S. (1944). *A simple intrinsic proof of the Gauss–Bonnet formula for closed Riemannian manifolds*. Ann. Math., 45, 747–752.
6. Milnor, J. W. (1965). *Topology from the Differentiable Viewpoint*. University Press of Virginia.
7. 山岸勇輝 (2026). 球対称密度分布における $n = 2$ の唯一性定理 [論文01]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186
8. 山岸勇輝 (2026). 規約は数であって、配置の関数ではない [論文15]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600352
9. 山岸勇輝 (2026). パフィアンの $2^n n!$ は、一つの塊である [論文48]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602525
10. 山岸勇輝 (2026). カルツァ＝クライン再入口 [論文57]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21597608