「二つの音」か「一つの揺れる音」かを決めているのは、音ではなく聞き手である

— 二つの正弦波の和は恒等式で、うなりの回数は信号の中で決まっている（和と積の書き換えが 12 桁で一致した） — 分離子は、周波数差が臨界帯域を越えるかである — [論文672]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— *From thinking to syncing.* —

要旨

二つの音を同時に鳴らすと、あるときは「二つの音」に、あるときは「一つの揺れる音」に聞こえる。その境目はどこにあるか。うなりの側と、聞き分けの側の量を並べて数える。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、うなりの回数は、音の側で決まっている——二つの正弦波の和は、うなりの包絡と平均の高さの積に書き換えられる。数値で確かめると 12 桁一致し、包絡の周期は差の半分でも、強さの山は毎秒 3 回（差の 3 Hz ぶん）立つ（第2節）。 第二に、これが本稿の芯である。境目を与える量は、聞き手の側にある——440 Hz での臨界帯域幅は、ツヴィッカーの式で 113.4975 Hz、ERB で 72.1932 Hz と 1.572137 倍違う。どちらも文献の標準的な式である（第3節）。 第三に、音程に直すと、その幅は広い——ツヴィッカーの帯域は 440 Hz で 397.2880 セント、すなわち半音 3.972880 個ぶんに当たり、ERB でも 263.0214 セントある（第3節）。 第四に、同じうなりが、高さによって違う音程を意味する——1 Hz のうなりは 110 Hz では 15.667383 セント、440 Hz では 3.930158 セント、880 Hz では 1.966194 セントで、端の比は 7.968379 倍である（第2節）。 第五に、既刊のセントは、そのままうなりの回数になる——論文466 が示した平均律の長三度のずれ 13.686286 セントは、440 Hz の上では毎秒 4.365262 回のうなりであり、五度のずれ 1.955001 セントは毎秒 0.744886 回である（第4節）。 第六に、分離子は、周波数差が臨界帯域を越えるかである——同じ二音でも、越えれば二つに、越えなければ一つの揺れる音になる（第4節）。 キーワード：うなり、臨界帯域幅、等価矩形帯域幅、セント、平均律、周波数分解。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——和と積の書き換え（うなり）、臨界帯域幅（ツヴィッカー 1961）、等価矩形帯域幅（グラスバーグとムーア 1990）、セントの定義は、いずれも既知である。聴覚の模型を作らない——臨界帯域幅の式は文献の二つを前提として置き、自前の模型は作らない。どちらが正しいかも決めない。協和と不協和を論じない——なぜある音程が快く、ある音程が荒く聞こえるかは主題ではない。音律を評価しない——どの音律が美しいか、どう調律すべきかは主題ではない（論文466 と同じ線）。個人差と条件を扱わない——音の大きさ、音色、訓練、年齢による違いは入れない。既刊との関係：論文466 は、完全五度を積んでもオクターブに合わないことを比の計算で示し、射程注記で「聴覚を論じない——うなり、可聴限界、和音の協和感は主題ではない。比の計算だけを見る」と明記した——本稿はその席に座り、466 の出したセントを、毎秒何回のうなりかに直す。論文649 は潮汐表を扱い、二つの分潮のうなりが 14.7653 日であることと、それを分けるには同じだけの長さの記録が要ることを示した——そこではうなりは信号の側の周期だった。ここでは同じうなりを、聞き分ける側から見る。加えたのは、和の恒等式を数値で確かめたこと、臨界帯域幅を二つの標準的な定義で並べ、1.572137 倍違うことを示したこと、同じ 1 Hz が高さによって違うセントになることを出したこと、466 のセントをうなりの回数に直したこと、分離子を「周波数差が臨界帯域を越えるか」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：振動数 f_1 と f_2 の二つの音を同時に鳴らす。和は次のように書き換えられる。

$$\sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t) = 2\cos\left(2\pi \frac{f_2 - f_1}{2} t\right) \sin\left(2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} t\right)$$

音程はセントで測る。1200 セントが 1 オクターブである。聞き分けの側の量として、臨界帯域幅を使う。

問い：「二つの音」と「一つの揺れる音」を分けているのは、音の側の量か、聞き手の側の量か。

2. 音の側は、恒等式で決まっている

計算 2.1：440 Hz と 443 Hz について、和と積の書き換えを数値で確かめた。ある時刻で左辺 -1.486883311274、右辺 -1.486883311274、差は 4.7×10^{-14} である。

> **観察 2.2**
>
> うなりの回数は、聞く前から決まっている。包絡の周期は差の半分（1.5 Hz）だが、強さの山は絶対値で二倍立つので毎秒 3 回である——ここまでは信号の性質であり、聞き手は関係しない。

計算 2.3：440 Hz を基準にしたとき、うなりの回数はセントに直すと次のようになる。

うなり	音程
0.5 Hz	1.966194 セント
1 Hz	3.930158 セント
2 Hz	7.851415 セント
5 Hz	19.562175 セント

同じ 1 Hz のうなりでも、110 Hz では 15.667383 セント、220 Hz では 7.851415 セント、880 Hz では 1.966194 セントに当たる。端の比は 7.968379 倍である。

3. 聞き手の側は、定義で動く

計算 3.1：臨界帯域幅を、二つの標準的な式で出した。

中心の高さ	ツヴィッカー	ERB	比
220 Hz	103.4708 Hz（667.3584 セント）	48.4466 Hz（344.5578 セント）	2.135771
440 Hz	113.4975 Hz（397.2880 セント）	72.1932 Hz（263.0214 セント）	1.572137
880 Hz	149.4869 Hz（271.6201 セント）	119.6863 Hz（220.7663 セント）	1.248989
1760 Hz	263.1640 Hz（241.2454 セント）	214.6726 Hz（199.2457 セント）	1.225885

440 Hz でツヴィッカーの帯域は半音 3.972880 個ぶん、ERB は 2.630214 個ぶんである。

> **観察 3.2**
>
> これが本稿の芯である。境目は、聞き手の側にあり、定義で動く。どちらの式も標準的だが、440 Hz で 1.572137 倍違う。音の側の量（うなりの回数）は 12 桁で決まるのに、境目の側は定義を選ぶだけで五割動く——「二つに聞こえるか」は、音に書き込まれていない。

計算 3.3：1 Hz のうなりまで聞き分けられるとすると、440 Hz では 3.930158 セント、261.6256 Hz では 6.604606 セントまで合わせられる。

4. 分離子

> **観察 4.1**
>
> 分離子は、周波数差が臨界帯域を越えるかである。越えれば二つの音として分かれ、越えなければ一つの音が揺れて聞こえる。同じ二音でも、高さを変えれば帯域幅が変わるので、答が変わる——音の側では何も変わっていないのに、である。

計算 4.2：論文466 が示した平均律のずれを、うなりの回数に直した。440 Hz の上の五度は、純正 660.000000 Hz に対し平均律 659.255114 Hz で、差は 0.744886 Hz（1.955001 セント）。長三度は純正 550.000000 Hz に対し平均律 554.365262 Hz で、差は 4.365262 Hz（13.686286 セント）である。

> **観察 4.3**
>
> 論文466 と並べる。466 は比の計算だけを見ると明記し、長三度のずれを 13.686286 セントと出した——同じずれが、440 Hz の上では毎秒 4.365262 回のうなりとして現れる。セントは比であり、うなりは差である。同じ食い違いが二つの顔を持つ。

> **観察 4.4**
>
> 論文649 と並べる。649 では、二つの分潮のうなり（14.7653 日）は信号の側の周期で、それを分けるには同じだけの記録が要った——ここでもうなりは信号の側にある。違うのは、分ける相手が計算ではなく耳であることで、そのぶん境目が定義に依る。

> **観察 4.5**
>
> 言わないこと。協和と不協和の理由、音律の良し悪し、個人差は扱っていない。臨界帯域幅の式はどちらが正しいとも決めていない——示したのは、うなりが音の側で 12 桁決まるのに、二つに聞こえるかどうかの境目は聞き手の側で 1.572137 倍も動くことである。

5. 点呼と結び

1. 和の恒等式が 12 桁一致（計算 2.1）：音の側。

2. 山は毎秒 **3** 回（観察 2.2）：包絡は **1.5 Hz**。
3. **1 Hz** は **3.930158** セント（計算 2.3）：**440 Hz** で。
4. **110 Hz** では **15.667383** セント（計算 2.3）：比は **7.968379**。
5. ツヴィッカー **113.4975 Hz**（計算 3.1）：**440 Hz** の帯域。
6. **ERB 72.1932 Hz**（計算 3.1）：比 **1.572137**。
7. **397.2880** セント（計算 3.1）：半音 **3.972880** 個ぶん。
8. 五度のうなり **0.744886 Hz**（計算 4.2）：**1.955001** セント。
9. 長三度は **4.365262 Hz**（計算 4.2）：論文466 の **13.686286** セント。
10. 臨界帯域を越えるか（観察 4.1）：分離子・論文649。

結び：二つの音が「二つ」に聞こえるか「一つの揺れる音」に聞こえるかは、音に書き込まれていない。うなりの回数は和の恒等式で決まっており、数値でも 12 桁一致した。ところが境目を与える臨界帯域幅は聞き手の側の量で、440 Hz でツヴィッカーの式 113.4975 Hz、ERB 72.1932 Hz と 1.572137 倍も違う——音の側が 12 桁で決まるのに、聞き手の側は定義を選ぶだけで五割動く。同じ 1 Hz のうなりも、110 Hz では 15.667383 セント、880 Hz では 1.966194 セントに当たる——うなりは差であり、音程は比だからである。分離子は、周波数差が臨界帯域を越えるかである。既刊との位置——論文466 が「聴覚は論じない」と空けた席で、466 の 13.686286 セントを毎秒 4.365262 回のうなりに直した。論文649 のうなりが信号の側の周期だったのに対し、ここでは分ける相手が耳である。正直に言えば——臨界帯域幅の式は文献の二つを置いただけで、どちらが正しいかは決めていない。

参考文献

1. Glasberg, B. R., & Moore, B. C. J. (1990). Derivation of Auditory Filter Shapes from Notched-Noise Data. Hearing Research.
2. 山岸勇輝 (2026). 『全部を合わせられないことは、証明された事実である』[論文466]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22733284
3. 山岸勇輝 (2026). 『潮汐表が百年先まで作れるのは、潮を解いているからではなく、分けているからである』[論文649]. Zenodo. 10.5281/zenodo.23014639
4. Zwicker, E. (1961). Subdivision of the Audible Frequency Range into Critical Bands. The Journal of the Acoustical Society of America.

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)