

Das Qubit als Hopf-Faserung

Ist Borns „2“ dieselbe Wurzel wie die „2“ der Hopf-Abbildung?

— Eine disziplinierte Zählung der Zweien — [Aufsatz 68]

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan

September 2026 (Zweite Auflage)

— *From thinking to syncing.* —

Zusammenfassung

Der Zustandsraum eines einzelnen Qubits ist genau die Hopf-Faserung: Normierte Zustandsvektoren bilden $\mathcal{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$, die physikalisch belanglose globale Phase ist die Faser $U(1) = \mathcal{S}^1$, und der Quotient $\mathcal{S}^3/U(1) = \mathcal{S}^2$ ist die Bloch-Kugel; die Projektion $\mathcal{S}^3 \rightarrow \mathcal{S}^2$ ist die Hopf-Abbildung (Mosseri–Dandoloff 2001; Urbantke 2003). Wir beobachten, dass die Hopf- (Bloch-)Abbildung $(\alpha, \beta) \mapsto \langle \psi | \vec{\sigma} | \psi \rangle$ in den Amplituden *quadratisch* ist, und ebenso die Bornsche Regel $p = |\psi|^2$.

Proposition: Beide sind Fälle der einzigen sesquilinearen Paarung $\langle \psi | A | \psi \rangle$ (mit A hermitesch) — also *sind Borns „2“ und die „2“ der Hopf-Abbildung dieselbe Wurzel*: Die Amplitude geht zweimal ein, einmal konjugiert. Das ist die einzige Stelle, an der zwei der „Zweien“ des Systems wirklich im Ursprung zusammenfallen. Dann wenden wir die Disziplin der Aufsätze 48 und 58 auf die übrigen Zweien an und geben eine **Zählung**: Die räumliche Fluss- $n = 2$ (Aufsätze 01, 53), die Euler-Charakteristik $\chi(\mathcal{S}^2) = 2$ (Aufsatz 67), die Spurumkehr-/Leiter-**2** (Aufsatz 58) und die Spinor-/Doppelüberlagerungs-**2** (Berry-Phase = $\frac{1}{2}\Omega$; die **720°**-Periodizität) werden als *im Wert übereinstimmend, ohne einen Ursprung zu teilen* gezeigt. Die geometrische (Berry-)Phase wird als Holonomie der Hopf-Faser identifiziert und knüpft an den Raumwinkel von Aufsatz 67 an, bleibt aber eine verschiedene (Spinor-)Wurzel. Der Wert der Zählung liegt gerade darin, dass sie nur vereinigt, was eine Wurzel teilt, und den Rest trennt.

Schlüsselwörter: Hopf-Faserung, Qubit, Bloch-Kugel, Bornsche Regel, Berry-Phase, Sesquilinearform, verschiedene Wurzeln, strukturelle Deutung.

1. Einleitung

Aufsatz 67 erreichte Hopf durch die Tür der Euler-Charakteristik und verankerte $4\pi = 2\pi\chi(\mathcal{S}^2)$ topologisch. Dieser Aufsatz nimmt die zweite tragfähige Tür, die empfohlen wurde, nachdem die Masse–Instanton-Brücke „ $16\pi^2$ “ gefallen war (Anmerkung in Aufsatz 15): die **Spin-/Phasen**-Tür. Dort erscheint Hopf nicht als Analogie, sondern als die buchstäbliche Geometrie eines quantenmechanischen Zweiniveausystems.

Der Zustandsraum eines Qubits *ist* die Hopf-Faserung. Liegt das einmal auf dem Tisch, wird eine Frage im Geist von Aufsatz 58 unvermeidlich: Das Yamagishi-System ist voller Faktoren zwei — die räumliche $\mathbf{n} = \mathbf{2}$ (Aufsatz 01), Borns $|\psi|^2$ (Aufsatz 53), die Spurumkehr- $\mathbf{2}$ (Aufsatz 58), die Euler-Charakteristik $\chi(\mathcal{S}^2) = \mathbf{2}$ (Aufsatz 67) — und die Hopf-Abbildung fügt eine weitere hinzu. *Welche davon teilen eine Wurzel, und welche stimmen nur im Wert überein?* Diese Frage zu beantworten ist die Arbeit dieses Aufsatzes.

Was dieser Aufsatz nicht tut. Er leitet die Bornsche Regel nicht her (die Quantenmechanik wird vorausgesetzt) und beansprucht keine neue Physik. Er berichtet über eine echte Vereinigung und, wichtiger noch, widersteht dem Rest.

2. Das Qubit ist die Hopf-Faserung

Ein reiner Qubit-Zustand ist

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad (1)$$

also $(\alpha, \beta) \in \mathcal{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$. Die globale Phase $|\psi\rangle \sim e^{i\gamma}|\psi\rangle$ ist physikalisch belanglos; der Quotient nach diesem $U(1) = \mathcal{S}^1$ liefert den Raum der physikalischen Zustände,

$$\mathcal{S}^3/U(1) = \mathbb{CP}^1 = \mathcal{S}^2 \quad (\text{die Bloch-Kugel}), \quad (2)$$

und die Projektion $\pi : \mathcal{S}^3 \rightarrow \mathcal{S}^2$ ist die **Hopf-Abbildung**. Explizit, mit den Pauli-Matrizen $\vec{\sigma}$,

$$\pi(\alpha, \beta) = (2 \operatorname{Re} \bar{\alpha}\beta, 2 \operatorname{Im} \bar{\alpha}\beta, |\alpha|^2 - |\beta|^2) = (\langle \sigma_x \rangle, \langle \sigma_y \rangle, \langle \sigma_z \rangle) = \vec{n}, \quad (3)$$

der Bloch-Vektor, $|\vec{n}| = 1$ (Hopf, 1931; Mosseri–Dandoloff, 2001; Urbantke, 2003).

3. Born und Hopf teilen eine Wurzel

Proposition 3.1 (Borns 2 = die 2 der Hopf-Abbildung)

Sowohl die Bornschen Wahrscheinlichkeiten als auch die Komponenten des Bloch-Vektors (der Hopf-Abbildung) sind Werte der einzigen sesquilinearen Paarung $\langle \psi | \mathbf{A} | \psi \rangle$ mit $\mathbf{A}$ hermitesch:

$$\underbrace{p_0 = |\alpha|^2 = \langle \psi | \Pi_0 | \psi \rangle, \quad p_1 = |\beta|^2 = \langle \psi | \Pi_1 | \psi \rangle}_{\text{Born}}, \quad \underbrace{n_i = \langle \psi | \sigma_i | \psi \rangle}_{\text{Hopf/Bloch}},$$

wobei Π_0, Π_1 die Projektoren auf $|0\rangle, |1\rangle$ sind. In jedem Fall geht die Amplitude ψ genau zweimal ein, einmal konjugiert. Daher sind der Exponent $\mathbf{2}$ der Bornschen Regel und der quadratische Grad der Hopf-Abbildung *dieselbe Wurzel*: die Sesquilinearität der Quantentheorie. Außerdem gilt $p_0 = (1 + n_z)/2$, sodass die Bornschen Wahrscheinlichkeiten affine Bilder der dritten Komponente der Hopf-Abbildung sind.

Beweis.

$|\alpha|^2 = \langle \psi | \Pi_0 | \psi \rangle$ und $|\beta|^2 = \langle \psi | \Pi_1 | \psi \rangle$ nach Definition der Projektoren; $n_i = \langle \psi | \sigma_i | \psi \rangle$ nach (3). Alle haben die Form $\langle \psi | A | \psi \rangle$, quadratisch (sesquilinear) in ψ . Die Identität $p_0 = (1 + n_z)/2$ folgt aus $n_z = |\alpha|^2 - |\beta|^2$ und $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. ■

Das ist das einzige echte Zusammenfallen des *Ursprungs* unter den Zweien des Systems: Beim Qubit ist „der Zustand wird quadriert, um eine physikalische Größe zu ergeben“ eine einzige Struktur, verwirklicht sowohl als Bornsche Wahrscheinlichkeit als auch als Bloch-Koordinate.

4. Eine Zählung der Zweien (Disziplin von Aufsatz 58)

Nachdem eine gemeinsame Wurzel gefunden ist, verbietet die Disziplin der Aufsätze 48 und 58 anzunehmen, dass die anderen folgen. Wir stellen sie tabellarisch zusammen.

Die „2“	Wo sie erscheint	Ihre Wurzel
Sesquilineare 2	Born $ \psi ^2$; Hopf/Bloch $\langle \psi \sigma \psi \rangle$	Quantenpaarung $\langle \psi A \psi \rangle$
Räumliche Fluss- n = 2	Aufsatz 01; Verdünnung r^{-2}	3D -Geometrie (Raumwinkel / Fluss)
Topologische $\chi(S^2) = 2$	Aufsatz 67	Topologie (Euler-Charakteristik)
Spurumkehr-/Leiter- 2	Aufsatz 58	ART-Spur / Dimensionsleiter
Spinor-/Doppelüberlagerungs- 2	Berry = $\frac{1}{2}\Omega$; 720°	SU(2) → SO(3) (Spin- $\frac{1}{2}$)

Proposition 4.1 (Nur Born und Hopf teilen eine Wurzel)

Von den fünf obigen Zweien teilt genau ein Paar — Born und die Hopf-/Bloch-Abbildung — einen Ursprung (Proposition 3.1). Die übrigen Zweien stimmen im Wert überein, nicht aber im Ursprung:

- Die räumliche $n = 2$ ist eine Aussage über den Abfall in $3D$; sie trifft die sesquilineare 2 nur durch *Komposition*: Für eine auslaufende Kugelwelle $\psi \sim e^{ikr}/r$ erzeugt das Quadrieren ($|\psi|^2$, die sesquilineare 2), angewandt auf $\psi \sim 1/r$, den Abfall r^{-2} (die räumliche 2), wie in Aufsatz 53 bemerkt. Komposition ist keine Identität.
- Die Euler-Charakteristik $\chi(S^2) = 2$ ist topologisch (Aufsatz 67); sie betrifft keine Amplituden.
- Die Spurumkehr- 2 ist ein Merkmal des Einstein-Tensors / der Dimensionsleiter (Aufsatz 58) und kreuzt den Leiterfaktor nur bei $D = 4$.
- Die Spinor- 2 (unten) ist der Überlagerungsgrad $SU(2) \rightarrow SO(3)$.

Keine weitere Identifikation wird beansprucht.

Der Sinn der Zählung ist nicht, die Zweien zu vereinigen, sondern damit *aufzuhören*, sie zu vereinigen. Ein Zusammenfallen des Ursprungs (Born=Hopf) ist echt; die anderen sind Resonanzen im Wert.

5. Die Berry-Phase ist die Holonomie der Hopf-Faser

Die Faser $U(1)$ der Hopf-Abbildung trägt einen natürlichen Zusammenhang, dessen Holonomie um eine Schleife C auf der Bloch-Kugel die geometrische (Berry-)Phase ist (Berry, 1984; Simon, 1983):

$$\gamma(C) = -\frac{1}{2} \Omega(C), \quad (4)$$

die Hälfte des Raumwinkels $\Omega(C)$, den C umschließt. Der Faktor $\frac{1}{2}$ ist die Spinor-/Doppelüberlagerungswurzel: Ein Spin- $\frac{1}{2}$ -Zustand braucht eine Drehung um 4π (720°), um zu sich selbst zurückzukehren. Das knüpft an Aufsatz 67 an — der Raumwinkel Ω ist dieselbe auf 4π normierte Größe, deren Gesamtwert $2\pi\chi(S^2)$ ist —, doch das $\frac{1}{2}$ hier ist eine *verschiedene* (Spinor-)Wurzel, weder die sesquilineare noch die topologische. Die Berry-Phase ist messbar, also ist die Hopf-Faser kein formales Hilfsmittel, sondern eine beobachtbare Struktur.

6. Tragweite der Behauptungen

Was gezeigt ist:

1. Der Zustandsraum des Qubits ist die Hopf-Faserung $S^3 \rightarrow S^2$ (Abschnitt 2).
2. Borns Exponent und die Hopf-/Bloch-Abbildung teilen eine Wurzel, die quantenmechanische Sesquilinearität $\langle\psi|A|\psi\rangle$ (Proposition 3.1).

3. Unter den fünf Zweien des Systems teilt nur dieses Paar einen Ursprung; der Rest stimmt nur im Wert überein (Proposition 4.1). Die Berry-Phase ist die Holonomie der Hopf-Faser, $\gamma = -\frac{1}{2}\Omega$ (eine verschiedene Spinor-Wurzel).

Was nicht gezeigt / nicht beansprucht ist:

- Eine Herleitung der Bornschen Regel. Die Quantenmechanik (Zustände, Projektoren, die Paarung $\langle\psi|A|\psi\rangle$) wird vorausgesetzt.
- Irgendeine Vereinigung der fünf Zweien über das einzige Zusammenfallen Born=Hopf hinaus. Die Zählung ist so angelegt, dass sie eine Übereinigung verhindert.
- Irgendeine Verwendung der Masse–Instanton–Brücke „ $16\pi^2$ “, die verschieden bleibt (Aufsatz 15). Dieser Aufsatz benutzt nur die Spin-/Phasen-Tür.

Offenes Problem. Gibt es einen Grund, warum die Geometrie des Zweiniveausystems *genau* die Hopf-Faserung ist — d. h. erzwingt $SU(2)$ (Spin- $\frac{1}{2}$) die Struktur $S^3 \rightarrow S^2$ eindeutig, oder ist sie eine Verwirklichung unter mehreren? Damit verbunden ist für ein System aus zwei Qubits das maßgebliche Objekt die (quaternionische) Hopf-Faserung $S^7 \rightarrow S^4$ und die Verschränkung (Mosseri–Dandoloff); ob sich die Zählung der Zweien dorthin erstreckt, bleibt offen.

7. Schluss

Das Qubit ist die Hopf-Faserung: Zustandsvektoren auf S^3 , die globale Phase die Faser $U(1)$, die physikalischen Zustände die Bloch-Kugel S^2 . Auf ihr sind Borns „ 2 “ und die „ 2 “ der Hopf-Abbildung ein und dieselbe Wurzel — die sesquilineare Paarung $\langle\psi|A|\psi\rangle$ —, das einzige echte Zusammenfallen des Ursprungs unter den Faktoren zwei des Systems. Wendet man die Disziplin der Aufsätze 48 und 58 an, so stimmen die übrigen Zweien (räumliche $n = 2$, topologische $\chi = 2$, Spurumkehr- 2 , Spinor- 2) im Wert überein, nicht aber im Ursprung. Die Berry-Phase verwirklicht die Holonomie der Hopf-Faser als messbaren halben Raumwinkel, knüpft an Aufsatz 67 an und bleibt doch eine verschiedene Spinor-Wurzel. Durch die Spin-/Phasen-Tür erreicht, ehrt dies Hopf, ohne das verschiedene Masse–Instanton- $16\pi^2$ zu berühren, und sein Wert liegt darin, eine wahre Wurzel von vier Resonanzen zu trennen.

Revisionsprotokoll

Zweite Auflage (September 2026): Keine Aussage, kein Satz und keine Nachrechnung wurde gegenüber der ersten Auflage verändert. Die deutsche, französische und italienische Fassung wurden hinzugefügt. Die Literaturangaben, die frühere Aufsätze dieses Korpus zitieren, nennen nun **die tatsächlichen Titel der zitierten Aufsätze im aktuellen Format** (Aufsatznummer und DOI nach dem Titel); die erste Auflage hatte die Titel verkürzt. Die Aufsatznummer steht nun in der Titelzeile, und die DOI wurde aus der Datumszeile entfernt. Die im Text zitierten Aufsätze 15 und 48 wurden in die Literaturangaben aufgenommen. **Inhaltlich hat sich nichts geändert, und nichts wurde zurückgezogen.**

Literatur

1. Hopf, H. (1931). *Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche*. Math. Ann., 104, 637–665.
2. Born, M. (1926). *Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge*. Z. Phys., 37, 863–867.
3. Berry, M. V. (1984). *Quantal phase factors accompanying adiabatic changes*. Proc. R. Soc. Lond. A, 392, 45–57.
4. Simon, B. (1983). *Holonomy, the quantum adiabatic theorem, and Berry's phase*. Phys. Rev. Lett., 51, 2167–2170.
5. Mosseri, R. & Dandoloff, R. (2001). *Geometry of entangled states, Bloch spheres and Hopf fibrations*. J. Phys. A, 34, 10243–10252.
6. Urbantke, H. K. (2003). *The Hopf fibration—seven times in physics*. J. Geom. Phys., 46, 125–150.
7. Nakahara, M. (2003). *Geometry, Topology and Physics*. 2nd ed., IOP.
8. Yamagishi, Y. (2026). *The Uniqueness Theorem of $\mathfrak{n} = 2$ for Spherically Symmetric Density Distributions* [Aufsatz 01]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186
9. Yamagishi, Y. (2026). *A Convention Is a Number, Not a Function of the Configuration* [Aufsatz 15]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600352
10. Yamagishi, Y. (2026). *The Pfaffian's $2^n n!$ Is One Block* [Aufsatz 48]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602525
11. Yamagishi, Y. (2026). *The Yamagishi Born-Rule Geometric Structure Theory* [Aufsatz 53]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21603193
12. Yamagishi, Y. (2026). *The Agreement of the Factors 2 Is a Case of Distinct Roots* [Aufsatz 58]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21597747
13. Yamagishi, Y. (2026). *The Euler-Characteristic Origin of the 4π Patch* [Aufsatz 67]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21642170

— *From thinking to syncing.* —

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)