

Le qubit comme fibration de Hopf

Le « 2 » de Born est-il de la même racine que le « 2 » de l'application de Hopf ?

— Un recensement discipliné des deux — [Article 68]

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japon

Septembre 2026 (Deuxième édition)

— *From thinking to syncing.* —

Résumé

L'espace des états d'un seul qubit est exactement la fibration de Hopf : les vecteurs d'état normalisés forment $\mathcal{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$, la phase globale, physiquement sans importance, est la fibre $U(1) = \mathcal{S}^1$, et le quotient $\mathcal{S}^3/U(1) = \mathcal{S}^2$ est la sphère de Bloch ; la projection $\mathcal{S}^3 \rightarrow \mathcal{S}^2$ est l'application de Hopf (Mosseri–Dandoloff 2001 ; Urbantke 2003). Nous observons que l'application de Hopf (de Bloch) $(\alpha, \beta) \mapsto \langle \psi | \vec{\sigma} | \psi \rangle$ est *quadratique* dans les amplitudes, et la règle de Born $p = |\psi|^2$ l'est aussi. **Proposition** : toutes deux sont des cas de l'unique appariement sesquilinéaire $\langle \psi | A | \psi \rangle$ (avec A hermitien) — donc *le « 2 » de Born et le « 2 » de l'application de Hopf sont la même racine* : l'amplitude entre deux fois, une fois conjuguée. C'est le seul endroit où deux des « deux » du système coïncident véritablement par l'origine. Nous appliquons ensuite la discipline des Articles 48 et 58 aux autres deux et donnons un **recensement** : le $n = 2$ du flux spatial (Articles 01, 53), la caractéristique d'Euler $\chi(\mathcal{S}^2) = 2$ (Article 67), le 2 du renversement de trace / de l'échelle (Article 58) et le 2 spinoriel / du revêtement double (phase de Berry = $\frac{1}{2}\Omega$; la périodicité de 720°) sont montrés *coïncider en valeur sans partager d'origine*. La phase géométrique (de Berry) est identifiée comme l'holonomie de la fibre de Hopf et se relie à l'angle solide de l'Article 67, tout en restant une racine distincte (spinorielle). La valeur du recensement tient précisément à ce qu'il n'unifie que ce qui partage une racine et sépare le reste.

Mots-clés : fibration de Hopf, qubit, sphère de Bloch, règle de Born, phase de Berry, forme sesquilinéaire, racines distinctes, interprétation structurelle.

1. Introduction

L'Article 67 a atteint Hopf par la porte de la caractéristique d'Euler, ancrant topologiquement $4\pi = 2\pi\chi(\mathcal{S}^2)$. Cet article prend la seconde porte solide recommandée après la chute du pont masse–instanton « $16\pi^2$ » (note de l'Article 15) : la porte du **spin et de la phase**. Là, Hopf apparaît non comme une analogie mais comme la géométrie littérale d'un système quantique à deux niveaux.

L'espace des états d'un qubit *est* la fibration de Hopf. Une fois ceci posé sur la table, une question dans l'esprit de l'Article 58 devient inévitable : le système Yamagishi est plein de facteurs deux — le $\mathbf{n} = \mathbf{2}$ spatial (Article 01), le $|\psi|^2$ de Born (Article 53), le $\mathbf{2}$ du renversement de trace (Article 58), la caractéristique d'Euler $\chi(S^2) = \mathbf{2}$ (Article 67) — et l'application de Hopf en ajoute un autre. *Lesquels partagent une racine, et lesquels ne coïncident qu'en valeur ?* Répondre à cela est le travail de cet article.

Ce que cet article ne fait pas. Il ne dérive pas la règle de Born (la mécanique quantique est supposée) et ne revendique aucune physique nouvelle. Il rapporte une unification véritable et, plus important encore, résiste au reste.

2. Le qubit est la fibration de Hopf

Un état pur de qubit est

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad (1)$$

donc $(\alpha, \beta) \in S^3 \subset \mathbb{C}^2$. La phase globale $|\psi\rangle \sim e^{i\gamma}|\psi\rangle$ est physiquement sans importance ; le quotient par ce $U(1) = S^1$ donne l'espace des états physiques,

$$S^3/U(1) = \mathbb{CP}^1 = S^2 \quad (\text{la sphère de Bloch}), \quad (2)$$

et la projection $\pi : S^3 \rightarrow S^2$ est l'**application de Hopf**. Explicitement, avec les matrices de Pauli $\vec{\sigma}$,

$$\pi(\alpha, \beta) = (2 \operatorname{Re} \bar{\alpha}\beta, 2 \operatorname{Im} \bar{\alpha}\beta, |\alpha|^2 - |\beta|^2) = (\langle \sigma_x \rangle, \langle \sigma_y \rangle, \langle \sigma_z \rangle) = \vec{n}, \quad (3)$$

le vecteur de Bloch, $|\vec{n}| = 1$ (Hopf, 1931 ; Mosseri–Dandoloff, 2001 ; Urbantke, 2003).

3. Born et Hopf partagent une racine

Proposition 3.1 (Le 2 de Born = le 2 de l'application de Hopf)

Les probabilités de Born comme les composantes du vecteur de Bloch (de l'application de Hopf) sont des valeurs de l'unique appariement sesquilinéaire $\langle \psi | A | \psi \rangle$ avec A hermitien :

$$\underbrace{p_0 = |\alpha|^2 = \langle \psi | \Pi_0 | \psi \rangle, \quad p_1 = |\beta|^2 = \langle \psi | \Pi_1 | \psi \rangle}_{\text{Born}}, \quad \underbrace{n_i = \langle \psi | \sigma_i | \psi \rangle}_{\text{Hopf/Bloch}},$$

où Π_0, Π_1 sont les projecteurs sur $|0\rangle, |1\rangle$. Dans chaque cas l'amplitude ψ entre exactement deux fois, une fois conjuguée. Donc l'exposant $\mathbf{2}$ de la règle de Born et le degré quadratique de l'application de Hopf sont *la même racine* : la sesquilinearité de la théorie quantique. De plus $p_0 = (1 + n_z)/2$, de sorte que les probabilités de Born sont des images affines de la troisième composante de l'application de Hopf.

Démonstration.

$|\alpha|^2 = \langle \psi | \Pi_0 | \psi \rangle$ et $|\beta|^2 = \langle \psi | \Pi_1 | \psi \rangle$ par définition des projecteurs ; $\mathbf{n}_i = \langle \psi | \sigma_i | \psi \rangle$ par (3). Tous sont de la forme $\langle \psi | \mathbf{A} | \psi \rangle$, quadratiques (sesquilinéaires) en ψ . L'identité $\mathbf{p}_0 = (\mathbf{1} + \mathbf{n}_z)/2$ découle de $\mathbf{n}_z = |\alpha|^2 - |\beta|^2$ et de $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. ■

C'est la seule coïncidence véritable d'*origine* parmi les deux du système : sur le qubit, « l'état est élevé au carré pour donner une grandeur physique » est une seule structure, réalisée à la fois comme probabilité de Born et comme coordonnée de Bloch.

4. Un recensement des deux (discipline de l'Article 58)

Une racine commune ayant été trouvée, la discipline des Articles 48 et 58 interdit de supposer que les autres suivent. Nous les tabulons.

Le « 2 »	Où il apparaît	Sa racine
2 sesquilinéaire	Born $ \psi ^2$; Hopf/Bloch $\langle \psi \sigma \psi \rangle$	appariement quantique $\langle \psi \mathbf{A} \psi \rangle$
$\mathbf{n} = 2$ du flux spatial	Article 01 ; dilution en $\mathbf{r}^{-2}$	géométrie en 3D (angle solide / flux)
$\chi(S^2) = 2$ topologique	Article 67	topologie (caractéristique d'Euler)
2 du renversement de trace / de l'échelle	Article 58	trace en RG / échelle des dimensions
2 spinoriel / du revêtement double	Berry = $\frac{1}{2}\Omega$; 720°	$SU(2) \rightarrow SO(3)$ (spin $\frac{1}{2}$)

Proposition 4.1 (Seuls Born et Hopf partagent une racine)

Des cinq deux ci-dessus, exactement une paire — Born et l'application de Hopf/Bloch — partage une origine (Proposition 3.1). Les autres deux coïncident en valeur mais non en origine :

- Le $\mathbf{n} = \mathbf{2}$ spatial est un énoncé sur la décroissance en $\mathbf{3D}$; il ne rencontre le $\mathbf{2}$ sesquilineaire que par *composition* : pour une onde sphérique sortante $\psi \sim e^{ikr}/r$, l'élévation au carré ($|\psi|^2$, le $\mathbf{2}$ sesquilineaire) appliquée à $\psi \sim 1/r$ produit r^{-2} (le $\mathbf{2}$ spatial), comme noté dans l'Article 53. Composition n'est pas identité.
- La caractéristique d'Euler $\chi(S^2) = \mathbf{2}$ est topologique (Article 67) ; elle ne fait intervenir aucune amplitude.
- Le $\mathbf{2}$ du renversement de trace est un trait du tenseur d'Einstein / de l'échelle des dimensions (Article 58), ne croisant le facteur de l'échelle qu'en $D = 4$.
- Le $\mathbf{2}$ spinoriel (ci-dessous) est le degré du revêtement $SU(2) \rightarrow SO(3)$.

Aucune autre identification n'est revendiquée.

Le but du recensement n'est pas d'unifier les deux mais de *cesser* de les unifier. Une coïncidence d'origine (Born=Hopf) est réelle ; les autres sont des résonances en valeur.

5. La phase de Berry est l'holonomie de la fibre de Hopf

La fibre $U(1)$ de l'application de Hopf porte une connexion naturelle dont l'holonomie le long d'une boucle C sur la sphère de Bloch est la phase géométrique (de Berry) (Berry, 1984 ; Simon, 1983) :

$$\gamma(C) = -\frac{1}{2} \Omega(C), \quad (4)$$

la moitié de l'angle solide $\Omega(C)$ enclos par C . Le facteur $\frac{1}{2}$ est la racine spinorielle / du revêtement double : un état de spin $\frac{1}{2}$ exige une rotation de 4π (720°) pour revenir à lui-même. Cela se relie à l'Article 67 — l'angle solide Ω est la même grandeur normalisée à 4π dont la valeur totale est $2\pi\chi(S^2)$ — mais le $\frac{1}{2}$ ici est une racine *distincte* (spinorielle), ni la sesquilineaire ni la topologique. La phase de Berry est mesurable, donc la fibre de Hopf n'est pas un artifice formel mais une structure observable.

6. Portée des affirmations

Ce qui est établi :

1. L'espace des états du qubit est la fibration de Hopf $S^3 \rightarrow S^2$ (Section 2).

2. L'exposant de Born et l'application de Hopf/Bloch partagent une racine, la sesquilinearité quantique $\langle \psi | A | \psi \rangle$ (Proposition 3.1).
3. Parmi les cinq deux du système, seule cette paire partage une origine ; le reste ne coïncide qu'en valeur (Proposition 4.1). La phase de Berry est l'holonomie de la fibre de Hopf, $\gamma = -\frac{1}{2}\Omega$ (une racine spinorielle distincte).

Ce qui n'est pas établi / pas revendiqué :

- Une dérivation de la règle de Born. La mécanique quantique (états, projecteurs, l'appariement $\langle \psi | A | \psi \rangle$) est supposée.
- Toute unification des cinq deux au-delà de la seule coïncidence Born=Hopf. Le recensement est conçu pour empêcher la sur-unification.
- Tout usage du pont masse–instanton « $16\pi^2$ », qui reste distinct (Article 15). Cet article n'utilise que la porte du spin et de la phase.

Problème ouvert. Y a-t-il une raison pour laquelle la géométrie du système à deux niveaux est *exactement* la fibration de Hopf — c'est-à-dire $SU(2)$ (spin $\frac{1}{2}$) impose-t-il la structure $S^3 \rightarrow S^2$ de façon unique, ou est-ce une réalisation parmi plusieurs ? De même, pour un système de deux qubits l'objet pertinent est la fibration de Hopf (quaternionique) $S^7 \rightarrow S^4$ et l'intrication (Mosseri–Dandolo) ; savoir si le recensement des deux s'y étend reste ouvert.

7. Conclusion

Le qubit est la fibration de Hopf : vecteurs d'état sur S^3 , phase globale la fibre $U(1)$, états physiques la sphère de Bloch S^2 . Sur elle, le « 2 » de Born et le « 2 » de l'application de Hopf sont une seule et même racine — l'appariement sesquilineaire $\langle \psi | A | \psi \rangle$ —, la seule coïncidence véritable d'origine parmi les facteurs deux du système. En appliquant la discipline des Articles 48 et 58, les autres deux ($n = 2$ spatial, $\chi = 2$ topologique, 2 du renversement de trace, 2 spinoriel) coïncident en valeur mais non en origine. La phase de Berry réalise l'holonomie de la fibre de Hopf comme un demi-angle solide mesurable, se reliant à l'Article 67 tout en restant une racine spinorielle distincte. Atteint par la porte du spin et de la phase, ceci honore Hopf sans toucher au $16\pi^2$ masse–instanton distinct, et sa valeur tient à la séparation d'une vraie racine d'avec quatre résonances.

Registre des révisions

Deuxième édition (septembre 2026) : aucune affirmation, aucun théorème ni aucune vérification n'a été modifié par rapport à la première édition. Les versions allemande, française et italienne ont été ajoutées. Les références qui citent des articles antérieurs de ce corpus donnent désormais **les titres réels des articles cités dans le format actuel** (numéro d'article et DOI après le titre) ; la première édition avait abrégé les titres. Le numéro de l'article a été placé sur la ligne du titre, et le

DOI a été retiré de la ligne de date. Les articles 15 et 48, cités dans le texte, ont été ajoutés aux références. **Rien de substantiel n’a changé, et rien n’a été retiré.**

Références

1. Hopf, H. (1931). *Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche*. Math. Ann., 104, 637–665.
2. Born, M. (1926). *Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge*. Z. Phys., 37, 863–867.
3. Berry, M. V. (1984). *Quantal phase factors accompanying adiabatic changes*. Proc. R. Soc. Lond. A, 392, 45–57.
4. Simon, B. (1983). *Holonomy, the quantum adiabatic theorem, and Berry’s phase*. Phys. Rev. Lett., 51, 2167–2170.
5. Mosseri, R. & Dandoloff, R. (2001). *Geometry of entangled states, Bloch spheres and Hopf fibrations*. J. Phys. A, 34, 10243–10252.
6. Urbantke, H. K. (2003). *The Hopf fibration—seven times in physics*. J. Geom. Phys., 46, 125–150.
7. Nakahara, M. (2003). *Geometry, Topology and Physics*. 2nd ed., IOP.
8. Yamagishi, Y. (2026). *The Uniqueness Theorem of $\mathbf{n} = \mathbf{2}$ for Spherically Symmetric Density Distributions* [Article 01]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186
9. Yamagishi, Y. (2026). *A Convention Is a Number, Not a Function of the Configuration* [Article 15]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600352
10. Yamagishi, Y. (2026). *The Pfaffian’s $2^n n!$ Is One Block* [Article 48]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602525
11. Yamagishi, Y. (2026). *The Yamagishi Born-Rule Geometric Structure Theory* [Article 53]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21603193
12. Yamagishi, Y. (2026). *The Agreement of the Factors $\mathbf{2}$ Is a Case of Distinct Roots* [Article 58]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21597747
13. Yamagishi, Y. (2026). *The Euler-Characteristic Origin of the 4π Patch* [Article 67]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21642170

— *From thinking to syncing.* —

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)