

Il qubit come fibrazione di Hopf

Il «2» di Born è della stessa radice del «2» della mappa di Hopf?

— Un censimento disciplinato dei due — [Articolo 68]

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Giappone

Settembre 2026 (Seconda edizione)

— *From thinking to syncing.* —

Sommario

Lo spazio degli stati di un singolo qubit è esattamente la fibrazione di Hopf: i vettori di stato normalizzati formano $\mathcal{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$, la fase globale, fisicamente irrilevante, è la fibra $U(1) = \mathcal{S}^1$, e il quoziente $\mathcal{S}^3/U(1) = \mathcal{S}^2$ è la sfera di Bloch; la proiezione $\mathcal{S}^3 \rightarrow \mathcal{S}^2$ è la mappa di Hopf (Mosseri–Dandoloff 2001; Urbantke 2003). Osserviamo che la mappa di Hopf (di Bloch) $(\alpha, \beta) \mapsto \langle \psi | \vec{\sigma} | \psi \rangle$ è *quadratica* nelle ampiezze, e così la regola di Born $p = |\psi|^2$. **Proposizione:** entrambe sono casi dell'unico accoppiamento sesquilineare $\langle \psi | A | \psi \rangle$ (con A hermitiano) — dunque il «2» di Born e il «2» della mappa di Hopf sono la stessa radice: l'ampiezza entra due volte, una volta coniugata. È l'unico punto in cui due dei «due» del sistema coincidono davvero per origine. Applichiamo poi la disciplina degli Articoli 48 e 58 agli altri due e diamo un **censimento**: il $n = 2$ del flusso spaziale (Articoli 01, 53), la caratteristica di Eulero $\chi(\mathcal{S}^2) = 2$ (Articolo 67), il 2 dell'inversione di traccia / della scala (Articolo 58) e il 2 spinoriale / del doppio rivestimento (fase di Berry = $\frac{1}{2}\Omega$; la periodicità di 720°) si mostrano *coincidenti nel valore senza condividere un'origine*. La fase geometrica (di Berry) è identificata come l'olonomia della fibra di Hopf e si collega all'angolo solido dell'Articolo 67, pur restando una radice distinta (spinoriale). Il valore del censimento sta proprio nell'unificare solo ciò che condivide una radice e nel separare il resto.

Parole chiave: fibrazione di Hopf, qubit, sfera di Bloch, regola di Born, fase di Berry, forma sesquilineare, radici distinte, interpretazione strutturale.

1. Introduzione

L'Articolo 67 ha raggiunto Hopf attraverso la porta della caratteristica di Eulero, ancorando topologicamente $4\pi = 2\pi\chi(\mathcal{S}^2)$. Questo articolo prende la seconda porta solida raccomandata dopo la caduta del ponte massa–istantone « $16\pi^2$ » (nota dell'Articolo 15): la porta dello **spin e della fase**. Lì Hopf compare non come analogia ma come la geometria letterale di un sistema quantistico a due livelli.

Lo spazio degli stati di un qubit è la fibrazione di Hopf. Una volta messo questo sul tavolo, una domanda nello spirito dell'Articolo 58 diventa inevitabile: il sistema Yamagishi è pieno di fattori due — il $\mathbf{n} = \mathbf{2}$ spaziale (Articolo 01), il $|\psi|^2$ di Born (Articolo 53), il $\mathbf{2}$ dell'inversione di traccia (Articolo 58), la caratteristica di Eulero $\chi(\mathbf{S}^2) = \mathbf{2}$ (Articolo 67) — e la mappa di Hopf ne aggiunge un altro. *Quali di questi condividono una radice, e quali coincidono solo nel valore?* Rispondere a questo è il lavoro dell'articolo.

Che cosa questo articolo non fa. Non deriva la regola di Born (la meccanica quantistica è presupposta) e non rivendica alcuna fisica nuova. Riporta un'unificazione autentica e, cosa più importante, resiste al resto.

2. Il qubit è la fibrazione di Hopf

Uno stato puro di qubit è

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad (1)$$

dunque $(\alpha, \beta) \in \mathbf{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$. La fase globale $|\psi\rangle \sim e^{i\gamma}|\psi\rangle$ è fisicamente irrilevante; il quoziente rispetto a questo $U(1) = \mathbf{S}^1$ dà lo spazio degli stati fisici,

$$\mathbf{S}^3/U(1) = \mathbb{CP}^1 = \mathbf{S}^2 \quad (\text{la sfera di Bloch}), \quad (2)$$

e la proiezione $\pi : \mathbf{S}^3 \rightarrow \mathbf{S}^2$ è la **mappa di Hopf**. Esplicitamente, con le matrici di Pauli $\vec{\sigma}$,

$$\pi(\alpha, \beta) = (2 \operatorname{Re} \bar{\alpha}\beta, 2 \operatorname{Im} \bar{\alpha}\beta, |\alpha|^2 - |\beta|^2) = (\langle \sigma_x \rangle, \langle \sigma_y \rangle, \langle \sigma_z \rangle) = \vec{n}, \quad (3)$$

il vettore di Bloch, $|\vec{n}| = 1$ (Hopf, 1931; Mosseri–Dandoloff, 2001; Urbantke, 2003).

3. Born e Hopf condividono una radice

Proposizione 3.1 (Il 2 di Born = il 2 della mappa di Hopf)

Sia le probabilità di Born sia le componenti del vettore di Bloch (della mappa di Hopf) sono valori dell'unico accoppiamento sesquilineare $\langle \psi | \mathbf{A} | \psi \rangle$ con $\mathbf{A}$ hermitiano:

$$\underbrace{p_0 = |\alpha|^2 = \langle \psi | \Pi_0 | \psi \rangle, \quad p_1 = |\beta|^2 = \langle \psi | \Pi_1 | \psi \rangle}_{\text{Born}}, \quad \underbrace{n_i = \langle \psi | \sigma_i | \psi \rangle}_{\text{Hopf/Bloch}},$$

dove Π_0, Π_1 sono i proiettori su $|0\rangle, |1\rangle$. In ciascun caso l'ampiezza ψ entra esattamente due volte, una volta coniugata. Dunque l'esponente $\mathbf{2}$ della regola di Born e il grado quadratico della mappa di Hopf sono *la stessa radice*: la sesquilinearità della teoria quantistica. Inoltre $p_0 = (1 + n_z)/2$, cosicché le probabilità di Born sono immagini affini della terza componente della mappa di Hopf.

Dimostrazione.

$|\alpha|^2 = \langle \psi | \Pi_0 | \psi \rangle$ e $|\beta|^2 = \langle \psi | \Pi_1 | \psi \rangle$ per definizione dei proiettori; $n_i = \langle \psi | \sigma_i | \psi \rangle$ per (3). Tutti sono della forma $\langle \psi | A | \psi \rangle$, quadratici (sesquilineari) in ψ . L'identità $p_0 = (1 + n_z)/2$ segue da $n_z = |\alpha|^2 - |\beta|^2$ e $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. ■

È l'unica coincidenza autentica di *origine* fra i due del sistema: sul qubit, «lo stato viene elevato al quadrato per dare una grandezza fisica» è un'unica struttura, realizzata sia come probabilità di Born sia come coordinata di Bloch.

4. Un censimento dei due (disciplina dell'Articolo 58)

Trovata una radice comune, la disciplina degli Articoli 48 e 58 vieta di supporre che gli altri seguano. Li mettiamo in tabella.

Il «2»	Dove compare	La sua radice
2 sesquilineare	Born $ \psi ^2$; Hopf/Bloch $\langle \psi \sigma \psi \rangle$	accoppiamento quantistico $\langle \psi A \psi \rangle$
$n = 2$ del flusso spaziale	Articolo 01; diluizione r^{-2}	geometria in 3D (angolo solido / flusso)
$\chi(S^2) = 2$ topologico	Articolo 67	topologia (caratteristica di Eulero)
2 dell'inversione di traccia / della scala	Articolo 58	traccia in RG / scala delle dimensioni
2 spinoriale / del doppio rivestimento	Berry = $\frac{1}{2}\Omega$; 720°	$SU(2) \rightarrow SO(3)$ (spin $\frac{1}{2}$)

Proposizione 4.1 (Solo Born e Hopf condividono una radice)

Dei cinque due qui sopra, esattamente una coppia — Born e la mappa di Hopf/Bloch — condivide un'origine (Proposizione 3.1). Gli altri due coincidono nel valore ma non nell'origine:

- Il $n = 2$ spaziale è un enunciato sul decadimento in 3D; incontra il 2 sesquilineare solo per *composizione*: per un'onda sferica uscente $\psi \sim e^{ikr}/r$, l'elevazione al quadrato ($|\psi|^2$, il 2 sesquilineare) applicata a $\psi \sim 1/r$ produce r^{-2} (il 2 spaziale), come notato nell'Articolo 53. La composizione non è identità.
- La caratteristica di Eulero $\chi(S^2) = 2$ è topologica (Articolo 67); non coinvolge ampiezze.
- Il 2 dell'inversione di traccia è una caratteristica del tensore di Einstein / della scala delle dimensioni (Articolo 58), che incrocia il fattore della scala solo a $D = 4$.
- Il 2 spinoriale (sotto) è il grado del rivestimento $SU(2) \rightarrow SO(3)$.

Non si rivendica alcuna ulteriore identificazione.

Lo scopo del censimento non è unificare i due ma *smettere* di unificarli. Una coincidenza di origine (Born=Hopf) è reale; le altre sono risonanze nel valore.

5. La fase di Berry è l'olonomia della fibra di Hopf

La fibra $U(1)$ della mappa di Hopf porta una connessione naturale la cui olonomia lungo un cammino chiuso C sulla sfera di Bloch è la fase geometrica (di Berry) (Berry, 1984; Simon, 1983):

$$\gamma(C) = -\frac{1}{2} \Omega(C), \quad (4)$$

metà dell'angolo solido $\Omega(C)$ racchiuso da C . Il fattore $\frac{1}{2}$ è la radice spinoriale / del doppio rivestimento: uno stato di spin $\frac{1}{2}$ richiede una rotazione di 4π (720°) per tornare a sé stesso. Ciò si collega all'Articolo 67 — l'angolo solido Ω è la stessa grandezza normalizzata a 4π il cui valore totale è $2\pi\chi(S^2)$ — ma il $\frac{1}{2}$ qui è una radice *distinta* (spinoriale), né quella sesquilineare né quella topologica. La fase di Berry è misurabile, quindi la fibra di Hopf non è un espediente formale ma una struttura osservabile.

6. Portata delle affermazioni

Che cosa è stabilito:

1. Lo spazio degli stati del qubit è la fibrazione di Hopf $S^3 \rightarrow S^2$ (Sezione 2).

2. L'esponente di Born e la mappa di Hopf/Bloch condividono una radice, la sesquilinearità quantistica $\langle \psi | A | \psi \rangle$ (Proposizione 3.1).
3. Fra i cinque due del sistema, solo quella coppia condivide un'origine; il resto coincide solo nel valore (Proposizione 4.1). La fase di Berry è l'olonomia della fibra di Hopf, $\gamma = -\frac{1}{2}\Omega$ (una radice spinoriale distinta).

Che cosa non è stabilito / non è rivendicato:

- Una derivazione della regola di Born. La meccanica quantistica (stati, proiettori, l'accoppiamento $\langle \psi | A | \psi \rangle$) è presupposta.
- Qualsiasi unificazione dei cinque due oltre l'unica coincidenza Born=Hopf. Il censimento è progettato per impedire la sovra-unificazione.
- Qualsiasi uso del ponte massa-istantone « $16\pi^2$ », che resta distinto (Articolo 15). Questo articolo usa solo la porta dello spin e della fase.

Problema aperto. C'è una ragione per cui la geometria del sistema a due livelli è *esattamente* la fibrazione di Hopf — cioè, $SU(2)$ (spin $\frac{1}{2}$) impone la struttura $S^3 \rightarrow S^2$ in modo unico, o è una realizzazione fra diverse? Analogamente, per un sistema di due qubit l'oggetto rilevante è la fibrazione di Hopf (quaternionica) $S^7 \rightarrow S^4$ e l'entanglement (Mosseri–Dandolo); se il censimento dei due si estenda fin lì resta aperto.

7. Conclusione

Il qubit è la fibrazione di Hopf: vettori di stato su S^3 , la fase globale la fibra $U(1)$, gli stati fisici la sfera di Bloch S^2 . Su di essa il «2» di Born e il «2» della mappa di Hopf sono una sola e medesima radice — l'accoppiamento sesquilineare $\langle \psi | A | \psi \rangle$ —, l'unica coincidenza autentica di origine fra i fattori due del sistema. Applicando la disciplina degli Articoli 48 e 58, gli altri due ($n = 2$ spaziale, $\chi = 2$ topologico, 2 dell'inversione di traccia, 2 spinoriale) coincidono nel valore ma non nell'origine. La fase di Berry realizza l'olonomia della fibra di Hopf come un mezzo angolo solido misurabile, collegandosi all'Articolo 67 pur restando una radice spinoriale distinta. Raggiunto attraverso la porta dello spin e della fase, ciò onora Hopf senza toccare il $16\pi^2$ massa-istantone distinto, e il suo valore sta nel separare una radice vera da quattro risonanze.

Registro delle revisioni

Seconda edizione (settembre 2026): nessuna affermazione, nessun teorema e nessuna verifica è stata modificata rispetto alla prima edizione. Sono state aggiunte le versioni tedesca, francese e italiana. I riferimenti che citano articoli precedenti di questo corpus riportano ora i **titoli effettivi degli articoli citati nel formato attuale** (numero dell'articolo e DOI dopo il titolo); la prima edizione aveva abbreviato i titoli. Il numero dell'articolo è stato spostato sulla riga del titolo e il

DOI è stato tolto dalla riga della data. Gli articoli 15 e 48, citati nel testo, sono stati aggiunti ai riferimenti. **Nulla di sostanziale è cambiato e nulla è stato ritirato.**

Bibliografia

1. Hopf, H. (1931). *Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche*. Math. Ann., 104, 637–665.
2. Born, M. (1926). *Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge*. Z. Phys., 37, 863–867.
3. Berry, M. V. (1984). *Quantal phase factors accompanying adiabatic changes*. Proc. R. Soc. Lond. A, 392, 45–57.
4. Simon, B. (1983). *Holonomy, the quantum adiabatic theorem, and Berry's phase*. Phys. Rev. Lett., 51, 2167–2170.
5. Mosseri, R. & Dandoloff, R. (2001). *Geometry of entangled states, Bloch spheres and Hopf fibrations*. J. Phys. A, 34, 10243–10252.
6. Urbantke, H. K. (2003). *The Hopf fibration—seven times in physics*. J. Geom. Phys., 46, 125–150.
7. Nakahara, M. (2003). *Geometry, Topology and Physics*. 2nd ed., IOP.
8. Yamagishi, Y. (2026). *The Uniqueness Theorem of $\mathfrak{n} = 2$ for Spherically Symmetric Density Distributions* [Articolo 01]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186
9. Yamagishi, Y. (2026). *A Convention Is a Number, Not a Function of the Configuration* [Articolo 15]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600352
10. Yamagishi, Y. (2026). *The Pfaffian's $2^n n!$ Is One Block* [Articolo 48]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602525
11. Yamagishi, Y. (2026). *The Yamagishi Born-Rule Geometric Structure Theory* [Articolo 53]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21603193
12. Yamagishi, Y. (2026). *The Agreement of the Factors 2 Is a Case of Distinct Roots* [Articolo 58]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21597747
13. Yamagishi, Y. (2026). *The Euler-Characteristic Origin of the 4π Patch* [Articolo 67]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21642170

— *From thinking to syncing.* —

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)