

Hopf 束としての量子ビット

ボルン則の「2」と Hopf 写像の「2」は同根か韻か

— 規律ある「2」たちの点呼 — [論文68]

著者: 山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

所属: Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年9月 (第2版)

— From thinking to syncing. —

要旨

1個の量子ビットの状態空間は、まさに Hopf 束である：規格化した状態ベクトルは $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ をなし、物理的に無意味な全体位相が繊維 $U(1) = S^1$ 、商 $S^3/U(1) = S^2$ がブロッホ球で、射影 $S^3 \rightarrow S^2$ が Hopf 写像 (Mosseri–Dandoloff 2001; Urbantke 2003)。本稿は、Hopf (ブロッホ) 写像 $(\alpha, \beta) \mapsto \langle \psi | \vec{\sigma} | \psi \rangle$ が振幅について2次であり、ボルン則 $p = |\psi|^2$ もまた2次であることを観察する。命題：両者はいずれも単一の双一次形式 $\langle \psi | A | \psi \rangle$ (A はエルミート) の値である——ゆえにボルン則の「2」と Hopf 写像の「2」は同根：振幅が二度、一度は共役として入る。これは体系の「2」たちのうち、出自が真に一致する唯一の場所である。次に論文48・58の規律を残りの「2」に適用し点呼を与える：空間フラックスの $n = 2$ (論文01・53)、オイラー標数 $\chi(S^2) = 2$ (論文67)、トレース反転／階段の 2 (論文58)、スピノル／二重被覆の 2 (ベリー位相 $= \frac{1}{2}\Omega$; 720° 周期) は、値は一致するが出自を共有しないことを示す。幾何学的 (ベリー) 位相を Hopf 繊維のホロノミーと同定し、論文67の立体角に接続する一方、なお別の (スピノルの) 根であることを保つ。点呼の価値は、根を共有するものだけを統合し、残りを分けることにある。

キーワード：Hopf 束、量子ビット、ブロッホ球、ボルン則、ベリー位相、双一次形式、別根、構造的解釈。

1. 序論

論文67はオイラー標数の扉から Hopf に達し、 $4\pi = 2\pi\chi(S^2)$ を位相的に锚づけた。本稿は、質量–インスタントンの「 $16\pi^2$ 」の橋が落ちた後 (論文15の注) に推奨した、もう一つの健全な扉——スピノル／位相——を取る。そこでは Hopf は類推ではなく、2準位量子系の文字通りの幾何として現れる。

量子ビットの状態空間は Hopf 束そのものである。これが卓上に載ると、論文58の精神での問いが避けられなくなる：山岸体系は因子2に満ちている——空間の $n = 2$ (論文01)、ボルン則 $|\psi|^2$ (論文53)、トレース反転の 2 (論文58)、オイラー標数 $\chi(S^2) = 2$ (論文67) ——そこに Hopf 写像がもう一つ加わる。これらのどれが根を共有し、どれが値で一致するだけか？ これに答えるのが本稿の仕事である。

本稿が行わないこと。ボルン則を導出せず（量子力学は仮定）、新しい物理も主張しない。一つの真の統合を報告し、そしてより重要なことに、残りを統合しない。

2. 量子ビットは Hopf 束である

純粋な量子ビット状態は

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad (1)$$

ゆえに $(\alpha, \beta) \in S^3 \subset \mathbb{C}^2$ 。全体位相 $|\psi\rangle \sim e^{i\gamma}|\psi\rangle$ は物理的に無意味；この $U(1) = S^1$ で割ると物理的状態の空間

$$S^3/U(1) = \mathbb{CP}^1 = S^2 \quad (\text{ブロッホ球}) \quad (2)$$

が得られ、射影 $\pi: S^3 \rightarrow S^2$ が Hopf 写像である。パウリ行列 $\vec{\sigma}$ を用いて具体的に

$$\pi(\alpha, \beta) = (2\operatorname{Re}\bar{\alpha}\beta, 2\operatorname{Im}\bar{\alpha}\beta, |\alpha|^2 - |\beta|^2) = (\langle\sigma_x\rangle, \langle\sigma_y\rangle, \langle\sigma_z\rangle) = \vec{n}, \quad (3)$$

ブロッホ・ベクトル、 $|\vec{n}| = 1$ (Hopf 1931; Mosseri–Dandoloff 2001; Urbantke 2003)。

3. ボルンと Hopf は一つの根を共有する

命題 3.1 (ボルンの 2 = Hopf 写像の 2)

ボルン確率もブロッホ・ベクトル (Hopf 写像) 成分も、いずれも単一の双一次形式 $\langle\psi|A|\psi\rangle$ (A エルミート) の値である：

$$\underbrace{p_0 = |\alpha|^2 = \langle\psi|\Pi_0|\psi\rangle, \quad p_1 = |\beta|^2 = \langle\psi|\Pi_1|\psi\rangle}_{\text{ボルン}}, \quad \underbrace{n_i = \langle\psi|\sigma_i|\psi\rangle}_{\text{Hopf/ブロッホ}},$$

ここで Π_0, Π_1 は $|0\rangle, |1\rangle$ への射影子。いずれの場合も振幅 ψ はちょうど二度、一度は共役として入る。ゆえにボルン則の指数 2 と Hopf 写像の 2 次は同根：量子論の双一次性である。さらに $p_0 = (1 + n_z)/2$ ゆえ、ボルン確率は Hopf 写像の第 3 成分のアフィン像である。

証明

射影子の定義より $|\alpha|^2 = \langle\psi|\Pi_0|\psi\rangle$ 、 $|\beta|^2 = \langle\psi|\Pi_1|\psi\rangle$ ；(3) より $n_i = \langle\psi|\sigma_i|\psi\rangle$ 。すべて $\langle\psi|A|\psi\rangle$ の形で、 ψ について 2 次 (双一次)。 $n_z = |\alpha|^2 - |\beta|^2$ と $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ から $p_0 = (1 + n_z)/2$ 。■

これは体系の「2」たちの中で、出自が真に一致する唯一の場所である：量子ビットでは「状態を 2 乗して物理量を得る」が一つの構造であり、ボルン確率としてもブロッホ座標としても実現される。

4. 「2」たちの点呼（論文58の規律）

一つの共有根を見つけたので、論文48・58の規律は「残りも従う」と決めてかかることを禁じる。表にする。

その「2」	現れる場所	その根
双一次の 2	ボルン $ \psi ^2$; Hopf/ブロッホ $\langle\psi \sigma \psi\rangle$	量子の対 $\langle\psi A \psi\rangle$
空間フラックス $n=2$	論文01 ; r^{-2} 希釈	3D幾何（立体角／フラックス）
位相 $\chi(S^2)=2$	論文67	トポロジー（オイラー標数）
トレース反転／階段 2	論文58	GRトレース／次元階段
スピノル／二重被覆 2	ベリー $=\frac{1}{2}\Omega ; 720^\circ$	$SU(2) \rightarrow SO(3)$ （スピン $\frac{1}{2}$ ）

命題 4.1（根を共有するのはボルンと Hopf だけ）

上の五つの「2」のうち、出自を共有するのはちょうど一組——ボルンと Hopf/ブロッホ写像——のみ（命題 3.1）。残りは値で一致するが出自は共有しない：

- 空間の $n=2$ は3D減衰の言明；双一次の 2 とは合成によってのみ出会う：外向き球面波 $\psi \sim e^{ikr}/r$ に対し、2乗 ($|\psi|^2$ 、双一次の 2) を $\psi \sim 1/r$ に施すと r^{-2} （空間の 2）を生む——論文53の指摘。合成は同一ではない。
- オイラー標数 $\chi(S^2)=2$ は位相的（論文67）；振幅を含まない。
- トレース反転の 2 はアインシュタインテンソル／次元階段の性質（論文58）で、階段因子と交わるのは $D=4$ のみ。
- スピノルの 2（下記）は被覆度 $SU(2) \rightarrow SO(3)$ 。

これ以上の同一視は主張しない。

点呼の眼目は「2」たちを統合することではなく、統合を止めることにある。出自の一致（ボルン=Hopf）は一つだけ本物；残りは値の上での韻である。

5. ベリー位相は Hopf 繊維のホロノミー

Hopf 写像の繊維 $U(1)$ は自然な接続を担い、ブロッホ球上の閉路 C に沿ったホロノミーが幾何学的（ベリー）位相である（Berry 1984; Simon 1983）：

$$\gamma(C) = -\frac{1}{2} \Omega(C), \quad (4)$$

C が囲む立体角 $\Omega(C)$ の半分。因子 $\frac{1}{2}$ はスピノル／二重被覆の根：スピン $\frac{1}{2}$ 状態は元に戻るのに 4π （ 720° ）回転を要する。これは論文67に接続する——立体角 Ω は、全値が $2\pi\chi(S^2)$ となる、あの 4π 規格化の量と同じ——が、ここの $\frac{1}{2}$ は別の（スピノルの）根であって、双一次でも位相でもない。ベリー位相は測定可能ゆえ、Hopf 繊維は形式上の道具ではなく観測可能な構造である。

6. 主張の射程

確立されたこと：

1. 量子ビットの状態空間は Hopf 束 $S^3 \rightarrow S^2$ （第2節）。
2. ボルン則の指数と Hopf/ブロッホ写像は一つの根——量子の双一次性 $\langle\psi|A|\psi\rangle$ ——を共有する（命題 3.1）。
3. 体系の五つの「2」のうち、その一組のみが出自を共有；残りは値のみ一致（命題 4.1）。ベリー位相は Hopf 繊維のホロノミー $\gamma = -\frac{1}{2}\Omega$ （別のスピノルの根）。

確立されていないこと／主張しないこと：

- ボルン則の導出。量子力学（状態・射影子・対 $\langle\psi|A|\psi\rangle$ ）は仮定。
- ボルン=Hopf の一致を超えた、五つの「2」の統合。点呼は過剰統合を防ぐために設計されている。
- 質量-インスタントンの「 $16\pi^2$ 」の橋の使用——これは別根のまま（論文15）。本稿はスピン／位相の扉のみを用いる。

未解決問題。2準位系の幾何がちょうど Hopf 束である理由はあるか—— $SU(2)$ （スピン $\frac{1}{2}$ ）は $S^3 \rightarrow S^2$ 構造を一意に強制するのか、それとも幾つかの実現の一つか。関連して、2量子ビットでは四元数 Hopf 束 $S^7 \rightarrow S^4$ と量子もつれが関わる（Mosseri-Dandoloff）；「2」たちの点呼がそこへ拡張されるかは未解決とする。

7. 結論

量子ビットは Hopf 束である：状態ベクトルは S^3 、全体位相は繊維 $U(1)$ 、物理的状态はブロッホ球 S^2 。その上で、ボルン則の「2」と Hopf 写像の「2」は一つの同じ根——双一次の対 $\langle\psi|A|\psi\rangle$ ——であり、体系の因子2たちの中で出自が真に一致する唯一の場所である。論文48・58の規律を適用すると、残りの「2」（空間 $n=2$ 、位相 $\chi=2$ 、トレース反転 2、スピノル 2）は値で一致するが出自は共有しない。ベリー位相は Hopf 繊維のホロノミーを測定可能な半立体角として実現し、論文67に接続しつつ別のスピノルの根に留まる。スピン／位相の

扉から達したこの接続は、別根である質量–インスタントンの $16\pi^2$ に触れずに Hopf に敬意を払い、その価値は一つの真の根を四つの韻から分けることにある。

改訂記録

第2版（2026年9月）：主張・定理・検算はいずれも初版から変更していない。独・仏・伊の三言語版を加えた。あわせて、参考文献で本体系の既刊を引く行を、引く編の実際の題名と今の書式（題名のあとに論文番号と DOI）に直した——初版は題名を短くして書いていた。論文番号を題名の行へ移し、日付欄の DOI を外した。本文で引いていた論文15・48を参考文献に加えた。内容に関わる変更は無く、撤回した内容も無い。

参考文献

1. Hopf, H. (1931). *Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche*. Math. Ann., 104, 637–665.
2. Born, M. (1926). *Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge*. Z. Phys., 37, 863–867.
3. Berry, M. V. (1984). *Quantal phase factors accompanying adiabatic changes*. Proc. R. Soc. Lond. A, 392, 45–57.
4. Simon, B. (1983). *Holonomy, the quantum adiabatic theorem, and Berry's phase*. Phys. Rev. Lett., 51, 2167–2170.
5. Mosseri, R. & Dandoloff, R. (2001). *Geometry of entangled states, Bloch spheres and Hopf fibrations*. J. Phys. A, 34, 10243–10252.
6. Urbanke, H. K. (2003). *The Hopf fibration—seven times in physics*. J. Geom. Phys., 46, 125–150.
7. Nakahara, M. (2003). *Geometry, Topology and Physics*. 2nd ed., IOP.
8. 山岸勇輝 (2026). 球対称密度分布における $n = 2$ の唯一性定理 [論文01]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186
9. 山岸勇輝 (2026). 規約は数であって、配置の関数ではない [論文15]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600352
10. 山岸勇輝 (2026). パフィアンの $2^n n!$ は、一つの塊である [論文48]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602525
11. 山岸勇輝 (2026). 山岸・ボルン則幾何構造理論 [論文53]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21603193
12. 山岸勇輝 (2026). 因子 2 の一致は「別根」である [論文58]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21597747
13. 山岸勇輝 (2026). 4π パッチのオイラー標数的起源 [論文67]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21642170

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)