

次元センス

— なぜ $3+1$ 次元か：独立な根による「過剰決定」として —

論文58の方法で、 $D=4$ を選ぶ諸基準が別根であることを証明する

著者: 山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

所属: Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

投稿区分: 論文69 (Paper 69) | Zenodo: 10.5281/zenodo.21650011

Category: 数理物理学 / 次元論 / 構造的解釈

キーワード: 次元性, 人間原理, 過剰決定, 別根, 共形不変, 重力子自由度, オイラー標数

— From thinking to syncing. —

本稿の位置づけ

本稿は構造的解釈と確立事実の体系的整理を提示する。時空が4次元でなければならないことを証明せず、新しい物理も主張しない。論文64（特別な次元は分布する）を過剰決定の言明へと鋭くする： $D=4$ において複数の基準が証明可能に独立な理由でこの次元を選ぶことを、論文58の別根判定法で証明する。論文64以降に加わる二つの基準——自由マクスウェル作用の共形（Weyl）不変（ $D=4$ でのみ成立）と、論文67の位相的錨 $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$ ——を加える。既存理論と矛盾する主張は含まない。

概要

論文64は「特別な次元」が一意でなく $\{3, 4, 5\}$ に分布することを示した。本稿は $D=4$ でこれを鋭くする。センス（台帳）を組む：次元を選ぶ諸基準を、各々の数学的根とともに体系的に台帳化する。空間（ $d=3$ ）は安定性（Bertrand; Ehrenfest）と鋭い波動伝播（Huygens）、容量（ $d=5$ ）は単位球体積の最大（論文59）、時空（ $D=4$ ）は五つの基準——マクスウェル作用の共形不変（ $D=4$ のみ）、重力子の点火 $N(D) = \frac{1}{2}D(D-3)$ 、 $\mathbb{R}^4$ のエキゾチック構造（Donaldson）と Hopf/インスタントン、トレース反転因子と階段因子の唯一の交差（論文58）、偶数次元の位相的錨 $\chi(S^{2n}) = 2$ （論文67）——が選ぶ。中心的成果は、論文58の方法により、これら五つの根が対ごとに独立であることの証明（命題3.1）である——共形ウェイト、小群の表現論、微分トポロジー、GRトレース、オイラー標数は互いに異なる起源を持ち、どれも他から導けない。ゆえに $D=4$ は単一理由でも緩い分布でもなく、独立な根によって過剰決定されている。過剰決定が記述的で必然性の証明ではないこと、どの基準を入れるかがモデル化の選択であることを明示する。

§1. 序論

物理空間がなぜ3次元かの論証は、通常 $d = 3$ に固有な性質を一つ提示する。論文64は調子を変え、複数の基準の最適点が帯域 $\{3, 4, 5\}$ に分布する（単一の「魔法の次元」はない）と観察した。

本稿は物理的に実現された値で描像を鋭くする。観察は、 $D = 4$ （時空）が一度でなく複数回選ばれること、そしてその理由の数学的起源が独立であることである。論文58の規律（量を値でなく起源で比べよ）を借り、 $D = 4$ を選ぶ複数の選択が別根であることを証明する。得られる言明は、いかなる単一の「なぜ4次元か」論証よりも強い： $D = 4$ は過剰決定されている。論文64には無かった二つの基準——電磁気の共形（Weyl）不変と、論文67の位相的錨 $\chi(S^{2n}) = 2$ ——を加える。

本稿が行わないこと。 $D = 4$ の必然性は証明しない（過剰決定は記述的）。物理も加えない（各基準は確立された結果）。

§2. センサス

d は空間次元、 $D = d + 1$ は時空次元。表は基準・選ぶ次元・数学的根を並べる。

基準	選ぶ	根（数学的起源）
安定な軌道/原子（Bertrand; Ehrenfest）	$d = 3$	$r^{-(d-1)}$ 力の有効ポテンシャルの安定性
鋭い波動伝播（Huygens）	奇 d , 最小 3	波動方程式の基本解
マクスウェル共形（Weyl）不変	$D = 4$	2形式 F の共形ウェイト： $\int F \wedge \star F$ が Weyl 不変 $\iff D = 2 \cdot 2$
伝播する重力子 $N = \frac{1}{2}D(D-3)$	$D = 4$ 点火	小群の表現論
エキゾチック $\mathbb{R}^4$ ；Hopf/インスタントン	$d = 4$	微分トポロジー（Donaldson； $S^3 \rightarrow S^2$ ）
トレース反転 = 階段因子（論文58）	$D = 4$	GRトレース $(D-2)/(D-3)$ 対 階段 2
位相的錨 $\chi(S^{2n}) = 2$ （論文67）	偶 D	オイラー標数 $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$
単位球体積の最大（論文59）	$d = 5$	$V_n = \pi^{n/2}/\Gamma(\frac{n}{2} + 1)$ が 5 で最大

マクスウェル共形基準について。自由電磁作用 $S = -\frac{1}{4} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^D x$ は Weyl 変換 $g \rightarrow \Omega^2 g$ の下で不変となるのが $D = 4$ のときに限る。場の強さが2形式で、 $\int F \wedge \star F$ が共形不変となるのは形式次数が $D/2$ のとき丁度だから（Weyl 1918；標準的）。

位相的錨について。論文67により $\int_{S^2} K dA = 2\pi\chi(S^2) = 4\pi$ 、一般に $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$ は偶数 n で 2、奇数で 0；ガウス＝ボネ／チャーンの錨は偶数次元にのみ存在し、 $D = 4$ はその最初の物理的な場合。

§3. 証明： $D = 4$ の選択は別根である

$D = 4$ の複数の項目が一つの論証の変装なら、センサスは中身を欠く。論文58の規律——値が一致しても起源が違う量を同一視するな——が、ここでは逆に働く： $D = 4$ の選択が異なる起源を持つことを証明する。

命題 3.1 ($D = 4$ の根の独立性)

表で $D = 4$ を選ぶ五つの基準は、対ごとに異なる数学的構造から生じる：

1. 共形ウェイト。マクスウェル不変は p 形式 ($p = 2$) に対する恒等式 $D = 2p$ から。微分形式の共形再スケールの言明。
2. 表現論。重力子数 $N = \frac{1}{2}D(D-3)$ は小群 $SO(D-2)$ の対称トレースレス表現の次元から。群の表現の言明。
3. 微分トポロジー。エキゾチック $\mathbb{R}^4$ と Hopf/インスタントンは、滑らかな4次元多様体のゲージ理論的不変量から (Donaldson)。微分構造の言明。
4. GRトレース。因子 $(D-2)/(D-3)$ はアインシュタインテンソルのトレース反転 (論文58)。計量トレースの代数の言明。
5. オイラー標数。 $\chi(S^{2n}) = 2$ は位相不変量 (論文67)。ホモロジーの言明。

これらのどれも、用いる数学の観点から他のいずれからも導けない；値 $D = 4$ を同じく選ぶ、別々の根である。

証明についての注. 各項は、名指した構造のみを用いて導かれる自己完結的な古典的結果を引用する (共形幾何； $SO(D-2)$ の表現論；4次元多様体論；テンソルトレース代数；ホモロジー)。各導出が値 $D = 4$ 自身を超えて共通の前提を持たないので、これらの根は論文58の意味で独立。■

観察 3.2 (過剰決定)

$D = 4$ は、根が独立な少なくとも五つの基準によって選ばれる (命題3.1)。ゆえにその特別さは過剰決定されている：単一の論証に依らず、緩い分布の一点でもなく、互いに還元不能な複数の理由の合流である。同じセンスは、 $d = 3$ を安定性と鋭い伝播の合流に、 $d = 5$ を体積容量に置く。

§4. 読み：過剰決定は人間原理的描像を精密化する

論文64は分布を人間原理の精密化として読んだ ($3+1$ は単一原因でなく最適点の集中で特別)。本センスはもう一段精密化する。集中は緩くない； $D = 4$ では独立な根の合流=過剰決定である。これは、必然性の主張になることなく記述的言明が取りうる最も強い形：

$3+1$ が特別なのは、一つの条件が他を禁じるからでも、単に複数の最適点が近傍にあるからでもなく、物理的次元が過剰決定されている——独立な理由で繰り返し選ばれる——からである。

過剰決定は、偶然でなく構造の署名として馴染み深い：一つの式で固定される値は偶然かもしれないが、五つの独立な式で固定される値はそうでない。だが (第5節) これは記述的な署名であって、証明ではない。

§5. 主張の射程

確立されたこと

1. センサスは確立された基準を選ぶ次元・根とともに集約し、論文64の一覧にマクスウェル共形基準と論文67の位相的錨を加える。
2. $D = 4$ の五つの選択は別根 (命題3.1)；ゆえに $D = 4$ は過剰決定される (観察3.2)。

確立されていないこと／未解決問題

- ・ $D = 4$ が必然であること。過剰決定は記述的で、人間原理的読みを強めるが閉じはしない。
- ・ 結論の基準非依存性。どの基準を入れるかはモデル化の選択；頑健なのは、含めた $D = 4$ 基準が独立な起源を持つこと。
- ・ 新しい物理（各行は確立された結果）。
- ・ 未解決：より深い単一の構造が五つの $D = 4$ 根を統一するか？ するならセンサスは定理に、しないなら根の独立性そのものが事実。これを分けるのが論文58の規律の先送り。

§6. 結論

次元センサスは、 $d = 3$ （安定性・鋭い波）、 $D = 4$ （マクスウェル共形不変・重力子の点火・エキゾチック/Hopf 位相・因子2の交差・偶数次元のオイラー錨）、 $d = 5$ （体積容量）を、各々の数学的根とともに台帳化する。論文58の別根判定を逆向きに適用し、 $D = 4$ の五つの選択が独立であることを証明する。ゆえに物理的次元は過剰決定されている：単一の理由でも緩い集中でもなく、還元不能な原因の合流によって特別である。これは人間原理的読みの記述的な強化であって必然性の証明ではない；独立な根が単一のより深い原因を隠すか否かが、統べる未解決問題として残る。

参考文献

1. Ehrenfest, P. (1917). *In what way does it become manifest ... that space has three dimensions?* Proc. Amsterdam Acad., 20, 200–209.
2. Bertrand, J. (1873). *Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe*. C. R. Acad. Sci., 77, 849–853.
3. Weyl, H. (1918). *Gravitation und Elektrizität*. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 465–480.
4. Courant, R. & Hilbert, D. (1962). *Methods of Mathematical Physics, Vol. II*. Interscience.
5. Deser, S., Jackiw, R. & 't Hooft, G. (1984). *Three-dimensional Einstein gravity*. Ann. Phys., 152, 220–235.
6. Donaldson, S. K. (1983). *An application of gauge theory to four-dimensional topology*. J. Diff. Geom., 18, 279–315.
7. Tegmark, M. (1997). *On the dimensionality of spacetime*. Class. Quantum Grav., 14, L69–L75.
8. [Yamagishi 2026, Paper 58] *The Factor Two as a Distinct Root*. Zenodo. [10.5281/zenodo.21597747](https://zenodo.org/record/21597747)
9. [Yamagishi 2026, Paper 59] *The Unit-Ball Volume Peaks in Five Dimensions*. Zenodo. [10.5281/zenodo.21597865](https://zenodo.org/record/21597865)
10. [Yamagishi 2026, Paper 64] *The Special-Dimension Distribution Theorem*. Zenodo. [10.5281/zenodo.21616221](https://zenodo.org/record/21616221)
11. [Yamagishi 2026, Paper 67] *The Euler-Characteristic Origin of the 4π Patch*. Zenodo. [10.5281/zenodo.21642170](https://zenodo.org/record/21642170)

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)