

Un'interpretazione strutturale della congettura di Poincaré 3D tramite il teorema di unicità $n=2$ e il flusso di Ricci di Perelman

— Uniformizzazione delle 3-varietà chiuse semplicemente connesse verso la sfera, e una corrispondenza strutturale con il funzionale W-entropia di Perelman — [Articolo 07]

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Giappone
Settembre 2026 (Terza edizione)

— *From thinking to syncing.* —

Sommario

Per la congettura di Poincaré tridimensionale — «ogni 3-varietà chiusa semplicemente connessa è omeomorfa alla 3-sfera S^3 » (teorema di Perelman) — presentiamo un'interpretazione strutturale basata sul teorema di unicità $n = 2$ ($dm/dr = 4\pi$). L'argomentazione procede in tre stadi.

Primo stadio: mettiamo l'una accanto all'altra le tre condizioni coinvolte nella dimostrazione — l'uniformità della massa dei gusci $n = 2$, l'equazione del flusso di Ricci $\partial_t g_{ij} = -2R_{ij}$ e la semplice connessione $\pi_1(M^3) = 0$ — e fissiamo la posizione logica di ciascuna. Ciò che guida la convergenza è il flusso di Ricci insieme alla semplice connessione; l'uniformità $n = 2$ esprime, nel vocabolario della geometria, **una proprietà soddisfatta dalla destinazione S^3** (Sezione 2).

Secondo stadio: leggiamo la crescita monotona del funzionale di $\mathcal{W}$ -entropia di Perelman $\mathcal{W}(g, f, \tau)$ come ottimizzazione del carico di rendering nell'OS dell'Universo (Proposizione 3.1). Il 4π nel fattore $(4\pi\tau)^{-3/2}$ del suo integrando proviene dalla normalizzazione del nucleo del calore, e la sua derivazione segue un percorso diverso da quella dell'angolo solido $\text{Vol}(S^2) = 4\pi$ — **lo stesso numero, a un indirizzo diverso** (Sezione 3).

Terzo stadio: collochiamo l'uniformizzazione mediante il flusso di Ricci $\partial_t g_{ij} = -2R_{ij}$ e la chirurgia nella fila formata dalla risoluzione della congettura di Poincaré in ogni dimensione e dall'esponente di conservazione dei gusci $n = d - 1$, confermiamo che tra i due non vi è derivazione, e diamo una mappa dimensione per dimensione (Sezione 4).

Portata (scope note): Questo articolo presenta un'interpretazione strutturale di un teorema dimostrato. La congettura di Poincaré tridimensionale è stata dimostrata da Perelman (2002–2003) con il flusso di Ricci di Hamilton e la chirurgia; questo articolo non prende parte a quella dimostrazione e non propone né una dimostrazione alternativa né una semplificazione. Anche la monotonia del funzionale $\mathcal{W}$ è un teorema di Perelman e vale indipendentemente dalla lettura qui proposta. Leggere il flusso di Ricci come ottimizzazione del carico di rendering è un'interpretazione, non un teorema. Le tre condizioni della Sezione 2 non sono equivalenti tra loro; sono enunciati su oggetti diversi (una distribuzione di densità, una metrica, un gruppo fondamentale). Il flusso di Ricci qui usato è anche, per il teorema di Friedan, il flusso del gruppo di rinormalizzazione della metrica bersaglio di un modello sigma bidimensionale (articolo 110). **Ciò che questo articolo aggiunge** è che esprime l'uniformità della destinazione $\mathcal{S}^3$ della congettura di Poincaré nel vocabolario del teorema di unicità $n = 2$; che costruisce una tabella di corrispondenze tra i concetti geometrici di Perelman e l'immagine dell'OS dell'Universo; e che distingue i due indirizzi diversi — la normalizzazione del nucleo del calore e l'angolo solido — da cui compare lo stesso 4π .

1. Introduzione: la congettura di Poincaré e il teorema di geometrizzazione di Perelman

1.1 Storia della congettura di Poincaré 3D

La congettura di Poincaré, posta da Henri Poincaré (1904), è stata dimostrata da Grigori Perelman (2002–2003) usando la teoria del flusso di Ricci di Hamilton insieme alla chirurgia sulle singolarità.

1.2 Collocazione dell'interpretazione strutturale

Questo articolo applica il teorema di unicità $n = 2$ (articolo 01) e il teorema di annullamento della massa in 4π (articolo 02) alla dimostrazione matematica di Perelman, e propone la visione informazionale secondo cui «il flusso di Ricci può essere letto come il processo di ottimizzazione della memoria spaziale e di uniformizzazione del rendering dell'OS dell'Universo».

2. Le tre condizioni (principio della triplice imposizione) e la loro posizione logica

Proposizione 2.1 (Le tre condizioni e il loro statuto logico)

Nel processo con cui una 3-varietà chiusa semplicemente connessa M^3 converge alla sfera standard S^3 intervengono tre condizioni:

- i. **Condizione analitica:** la condizione di uniformità del tasso di crescita della massa dei gusci di una distribuzione di densità a simmetria sferica, $n = 2$ ($m(R) = 4\pi R$).
- ii. **Condizione dinamica:** l'equazione del flusso di Ricci di Perelman $\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2R_{ij}$.
- iii. **Condizione topologica:** la semplice connessione $\pi_1(M^3) = 0$.

Le tre condizioni sono enunciati su oggetti diversi. (i) è una condizione analitica su una distribuzione di densità su $\mathbb{R}^3$, (ii) un'equazione alle derivate parziali su una metrica, e (iii) una condizione topologica sul gruppo fondamentale; non sono equivalenti tra loro.

La relazione logica è la seguente. Ciò che agisce davvero nella dimostrazione della congettura di Poincaré sono (ii) e (iii), dovute a Perelman (2002–2003). La condizione (i) è **una proprietà soddisfatta dal limite S^3** , non una causa che guida la convergenza. Il ruolo di (i) in questo articolo è **fornire un vocabolario geometrico per caratterizzare la destinazione**.

2.1 Corrispondenza strutturale con la dimostrazione di Perelman

La corrispondenza tra i concetti geometrici di Perelman e i concetti informazionali-geometrici di questo quadro è la seguente:

- **Flusso di Ricci** $\partial_t g_{ij} = -2R_{ij} \iff$ protocollo di levigatura del carico di rendering spaziale
- **$\mathcal{W}$ -entropia di Perelman** $\iff$ efficienza di compressione della memoria spaziale (tasso di prevenzione dei crash)
- **Singularità a strozzatura (neck-pinch)** $\iff$ congelamento di micro-singularità $n > 2$ (congestione dei dati)
- **Chirurgia** $\iff$ riformattazione forzata mediante la patch di Yamagishi $m = 4\pi$
- **Sfera standard S^3** $\iff$ griglia di rendering perfettamente uniforme ($m(R) = 4\pi R$)

3. Corrispondenza strutturale con il funzionale di $\mathcal{W}$ -entropia di Perelman

Il funzionale di $\mathcal{W}$ -entropia di Perelman è definito da

$$\mathcal{W}(g, f, \tau) = \int_{M^3} [\tau(R + |\nabla f|^2) + f - 3] (4\pi\tau)^{-3/2} e^{-f} dV$$

e cresce monotonamente sotto il flusso di Ricci ($\frac{d\mathcal{W}}{dt} \geq 0$).

Proposizione 3.1 (Lettura informazionale della monotonia di $\mathcal{W}$)

La crescita monotona $\frac{d\mathcal{W}}{dt} \geq 0$ del funzionale $\mathcal{W}$ esprime il processo con cui il flusso di Ricci leviga le irregolarità della curvatura e porta la varietà verso uno stato uniforme. Letta nell'immagine dell'OS dell'Universo, può essere associata a **un protocollo di ottimizzazione che minimizza il carico di rendering spaziale**. Lo stesso Perelman introdusse $\mathcal{W}$ per analogia con l'entropia della meccanica statistica.

3.1 Due indirizzi del fattore 4π

Il 4π nel fattore $(4\pi\tau)^{-3/2}$ dell'integrando e l'angolo solido della 2-sfera $\text{Vol}(S^2) = 4\pi$ sono numericamente uguali, ma le loro derivazioni seguono percorsi diversi.

- Il 4π in $(4\pi\tau)^{-3/2}$ è la **costante di normalizzazione del nucleo del calore (nucleo gaussiano)**. Nasce dall'integrale gaussiano unidimensionale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/(4\tau)} dx = \sqrt{4\pi\tau}$$

e in tre dimensioni viene elevato al cubo, dando $(4\pi\tau)^{3/2}$. Il 4 qui viene dalla convenzione $e^{-|x|^2/(4\tau)}$ nell'esponente per l'equazione del calore $\partial_t u = \Delta u$, e il π dall'integrale gaussiano $\int e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

- $\text{Vol}(S^2) = 4\pi$ è l'**angolo solido della 2-sfera**, e nasce da $\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi$.

I due concordano numericamente, ma le loro derivazioni non hanno nulla in comune. La disciplina dell'articolo 48 — non contare come una sola coincidenze numeriche di origine diversa — vale anche qui.

La monotonia del funzionale $\mathcal{W}$ stesso è un teorema rigoroso di Perelman (2002) e vale indipendentemente dall'interpretazione di questo articolo.

4. Il teorema di Perelman e un confronto per dimensione

Teorema 4.1 (Perelman 2002–2003): una 3-varietà chiusa semplicemente connessa M^3 è omeomorfa alla 3-sfera standard S^3 .

Il Teorema 4.1 è il teorema di Perelman, e la sua dimostrazione si fonda sul flusso di Ricci e sulla chirurgia. Questo articolo dà una lettura di quel teorema.

4.1 Confronto per dimensione

Mettiamo l’una accanto all’altra la risoluzione della congettura di Poincaré in ogni dimensione e il corrispondente esponente di conservazione dei gusci. La relazione tra l’esponente n e $\text{Vol}(S^{d-1})$ è il Teorema 4.1 dell’articolo 06 ($n = d - 1, \text{Vol}(S^{d-1}) = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$).

Dimensione d	Risoluzione	$n = d - 1$	$\text{Vol}(S^{d-1})$
2	Classica	$n = 1$	2π
3	Perelman (2002–2003)	$n = 2$	4π
4	Freedman (1982), topologica	$n = 3$	$2\pi^2$
≥ 5	Smale (1961)	$n = d - 1$	$2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$

Tra le due colonne di destra e le due di sinistra non vi è alcuna derivazione; la tabella serve a mettere le due l’una accanto all’altra. Che le dimensioni superiori siano state risolte prima (Smale 1961 → Freedman 1982 → Perelman 2003) riflette il fatto topologico che la chirurgia ha più spazio in dimensione superiore, ed è una questione diversa dai valori di $\text{Vol}(S^{d-1})$.

5. Conclusione

Questo articolo ha presentato un’interpretazione strutturale della congettura di Poincaré tridimensionale dimostrata da Perelman.

- 1. La posizione logica delle tre condizioni coinvolte nella dimostrazione: ciò che guida la convergenza è il flusso di Ricci insieme alla semplice connessione, e l’uniformità $n = 2$ esprime una proprietà della destinazione S^3 (Sezione 2).
- 2. Una visione che legge la crescita monotona del funzionale $\mathcal{W}$ come ottimizzazione del carico di rendering (Proposizione 3.1).
- 3. Il 4π del nucleo del calore e il 4π dell’angolo solido sono lo stesso numero a due indirizzi diversi (Sezione 3).
- 4. La risoluzione della congettura di Poincaré in ogni dimensione, messa accanto all’esponente di conservazione dei gusci (Sezione 4).

Osservazione finale: la visione che legge l’uniformizzazione mediante il flusso di Ricci come «ottimizzazione del carico di rendering» offre un ingresso intuitivo a questo profondo risultato matematico. E subito dentro quell’ingresso, lo stesso 4π compare da due luoghi diversi: la diffusione del calore e l’angolo su tutte le direzioni.

Registro delle revisioni

Terza edizione (settembre 2026): la forma è stata allineata al modello attuale (la collocazione e la relazione con l’articolo 110 raccolte nella nota di portata subito dopo il sommario, e tolta l’«indicazione di portata» finale). Nel titolo, «Riformulazione informazionale-geometrica» è diventata «Un’interpretazione strutturale»; nel sottotitolo, «Imposizione sferica» e «isomorfismo» sono diventati «Uniformizzazione verso la sfera» e «corrispondenza strutturale»; e il «dimostriamo che è isomorfo» del sommario è stato allineato al testo come presentazione di una lettura. Sono stati aggiunti i DOI ai riferimenti del corpus.

Seconda edizione (luglio 2026): sono stati tolti tre enunciati della prima edizione — che le tre condizioni siano equivalenti tra loro, che il 4π in $(4\pi\tau)^{-3/2}$ sia l’angolo solido $\text{Vol}(S^2)$, e la presentazione come se questo articolo dimostrasse il teorema principale.

Bibliografia

1. Poincaré, H. (1904). *Cinquième complément à l’analysis situs*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.
2. Perelman, G. (2002). *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*. arXiv:math/0211159.
3. Perelman, G. (2003). *Ricci flow with surgery on three-manifolds*. arXiv:math/0303109.
4. Hamilton, R. S. (1982). *Three-manifolds with positive Ricci curvature*. Journal of Differential Geometry.
5. Yamagishi, Y. (2026). *The Uniqueness Theorem of $n = 2$ for Spherically Symmetric Density Distributions* [Articolo 01]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186
6. Yamagishi, Y. (2026). *The 4π Mass Cancellation Theorem* [Articolo 02]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403931
7. Yamagishi, Y. (2026). *The Critical Line and the Fixed Point of the Functional Equation* [Articolo 06]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404262
8. Yamagishi, Y. (2026). *The Pfaffian’s $2^n n!$ Is One Block* [Articolo 48]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602525
9. Yamagishi, Y. (2026). *Ricci Flow Is a Renormalization Group Flow* [Articolo 110]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21837476

— From thinking to syncing. —

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)