

定数の実家

— 4π と $32\pi^2$ は指数定理の規格化である —

山岸パッチを Atiyah–Singer の家系へ、ただし分岐は融合させずに

著者: 山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

所属: Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

投稿区分: 論文70 (Paper 70) | Zenodo: 10.5281/zenodo.21650347

Category: 数理物理学 / トポロジー / 構造的解釈

キーワード: Atiyah–Singer 指数定理, ガウス=ボネ=チャーン, オイラー類, チャーン指標, ポアンカレ=ホップ, 特性類, 別根

— *From thinking to syncing.* —

本稿の位置づけ

本稿は構造的解釈を提示する：山岸体系に繰り返し現れる定数 (4π , $16\pi^2$, $32\pi^2$, $(4\pi)^n n!$ 階段) の数学的実家を、Atiyah–Singer 指数定理に現れる特性類の規格化定数として同定する。新しい数学は主張しない（指数定理は仮定・引用）、新しい物理も主張しない。重要なのは、論文48・58の規律に従い、指数定理が実家であって増殖ではないことを示す点：各分岐にわたって「解析的指数=位相的指数」という言明を統一するが、異なる分岐（オイラー、チャーン指標、ディラック）の数値定数は別根のまま残る。既存理論と矛盾する主張は含まない。

概要

論文67は礎の定数を $4\pi = 2\pi\chi(S^2)$ (2次元ガウス=ボネ) として錨づけ、論文48は $2n$ 次元チャーン=ガウス=ボネの高次規格化 $(4\pi)^n n!$ を解凍した。本稿はその共通の実家を名指す。ガウス=ボネ=チャーンは、楕円型作用素に対し解析的指数が特性類の位相的積分に等しいと述べる Atiyah–Singer 指数定理の一分岐である。三点：(i) 位置づけ： $4\pi = 2\pi\chi(S^2)$ と $(4\pi)^n n!$ はオイラー類分岐の規格化、ポアンカレ=ホップ (Hopf 1926) は「指数」の原型。(ii) 同じ家の別部屋：論文45のインスタントン $16\pi^2$ (第2チャーン類、 $k = \frac{1}{16\pi^2} \int \text{tr } F \wedge F$) も指数定理に住むが、ゲージ結合ディラック作用素を支配するチャーン指標分岐という別分岐。ゆえに指数定理は、論文48が見出したオイラー $32\pi^2$ とインスタントン $16\pi^2$ の別根性を上から証明しつつ、共通の実家として統一もする。(iii) 帰結：パッチ定数は孤児でなく古典的家系の一員、その位相的身分（論文67）は論文48を通じ全偶数次元へ。これが導出でなく位置づけであること、スピン/ディラック ($\hat{A}$ 種数) 分岐——論文68につながる——は方向として掲げること、を明示する。

§1. 序論

先行の二結果が、繰り返し現れる π 幂の定数を位相的地盤に置いた。論文67： $4\pi = 2\pi\chi(S^2)$ （礎の 4π は球のオイラー標数の 2π 倍、ポアンカレ=ホップで固定）。論文48： $2n$ 次元チャーン=ガウス=ボネの規格化が $(4\pi)^n n!$ ($4\pi, 32\pi^2, 384\pi^3$) であり、このオイラーの $32\pi^2$ は論文45のインスタントン $16\pi^2$ とは別根。

本稿は要石を据える：共通の実家が Atiyah–Singer 指数定理である。実家を名指すことは同時に、パッチ定数が位相的規格化だと証明し、オイラーとインスタントンの定数が一つの定理の異なる分岐に住む（それぞれ別根の理由）ことを示し、スピン/ディラック分岐を次の扉（論文68へ）と同定する。

本稿が行わないこと。指数定理を証明しない（仮定・引用）、物理も加えない。既知の定数を既知の家系に置くのであり、分岐を融合しない。

§2. 指数定理の家系（確立）

Atiyah–Singer 指数定理（1963）は、閉多様体 M 上の楕円型微分作用素 D に対し

$$\underbrace{\text{index}(D)}_{\text{解析的: } \dim \ker D - \dim \text{coker } D} = \underbrace{\int_M [\text{ある特性類}]}_{\text{位相的}}$$

と述べる。 D の選び方で古典的諸定理が得られ、各々が固有の特性類と規格化を持つ：

作用素／定理	特性類	計算する量	分岐
de Rham／オイラー（ガウス=ボネ=チャーン）	オイラー類 $e(TM)$	$\chi(M)$	オイラー
符号数（Hirzebruch）	L 種数	符号数 $\sigma(M)$	符号数
Dolbeault（リーマン=ロッホ）	Todd 類	正則オイラー標数	Todd
ディラック（スピン）	$\hat{A}$ 種数	スピノル指数	ディラック
ゲージ結合ディラック	$\hat{A}(M) \text{ch}(E)$	インスタントン数を含む	チャーン指標

「指数（index）」という語自体がベクトル場の指数に由来する：ポアンカレ=ホップ（Hopf 1926）は M 上のベクトル場の指数の総和が $\chi(M)$ ——de Rham（オイラー）作用素の指数——に等しいと述べる。ホップの定理は「指数」の原型。

§3. パッチ定数の居場所

命題 3.1 (パッチ定数はオイラー分岐の規格化)

論文67・48で錨づけた定数は、オイラー類分岐の規格化である：

- 2次元で $\int_{S^2} K dA = 2\pi\chi(S^2) = 4\pi$ (論文67)：ガウス＝ボネ、 $\int_M e(TM) = \chi(M)$ 、規格化 2π 。
- $2n$ 次元でチャーン＝ガウス＝ボネの規格化は $(4\pi)^n n!$ (論文48)： $n = 1, 2, 3$ で $4\pi, 32\pi^2, 384\pi^3$ 。

ゆえに 4π と $32\pi^2$ はオイラー類の $n = 1, 2$ の規格化、ポアンカレ＝ホップはそのベクトル場・指数の原型。

証明. 両言明は引用論文 (論文67の $n = 1$ ガウス＝ボネ、論文48の $(4\pi)^n n!$) から。これらを指数定理に置くのは、ガウス＝ボネ＝チャーンを Atiyah–Singer のオイラー分岐と同定すること (標準的)。■

命題 3.2 (インスタントン定数は別の分岐)

論文45の $16\pi^2$ ——第2チャーン類、 $k = \frac{1}{16\pi^2} \int_M \text{tr}(F \wedge F)$ に入る——はチャーン指標分岐の規格化で、ゲージ結合ディラック作用素を支配する (指数積分が $\text{ch}(E)$ 、ゆえに $c_2 \cdot$ インスタントン数を含む)。これは命題3.1 のオイラー分岐ではない。

$32\pi^2$ (オイラー) と $16\pi^2$ (チャーン指標) は、同じ定理の異なる分岐に、異なる特性類 ($e(TM)$ 対 $c_2(E)$) から組み立てられて座る。

§4. 実家であって坩堝ではない

観察 4.1 (指数定理は言明を統一するが数を統一しない)

第2節の表の各行は、一つの言明 (解析的指数＝位相的積分) の実例。この意味で指数定理はパッチ定数を統一する。しかし特性類は分岐ごとに異なる：オイラー類 e 、 L 種数、Todd 類、 $\hat{A}$ 種数、チャーン指標は、異なる規格化定数を持つ異なるコホモロジー類。ゆえに数値定数は統一されない：オイラーの $(4\pi)^n n!$ 、インスタントンの $16\pi^2$ 、ディラックの $\hat{A}$ の定数は別根。

これはまさに論文48・58の規律を、上から見たもの。論文48はオイラーの $32\pi^2$ とインスタントンの $16\pi^2$ が別根と見出し、同一視を戒めた。指数定理はその理由を説明する：両者は、同じ壮大な定理にたまたま現れる、異なる特性類（ e 対 c_2 ）の規格化である。共通の実家は共通の起源ではない。指数定理は家であり、定数は兄弟であって同一人物ではない。

§5. 帰結

系 5.1（パッチ定数は全偶数次元で位相的）

命題3.1により、オイラー分岐の定数はすべての偶数次元で位相的規格化；論文67の2次元言明（ 4π は位相的）は孤立でなく塔の基底。定数は恣意的でなく、位相不変量が取らねばならない値。

観察 5.2（スピン/ディラックの扉）

第2節の分岐のうち体系がまだ触れていない唯一のものがディラック（ $\hat{A}$ 種数）分岐。これは自然な続編：論文68の量子ビットは既にスピンの世界（ $SU(2)$ 、ブロッホ球、ベリー位相）に住む。体系の定数が $\hat{A}$ 種数の読みを獲得するかは、主張でなく方向として残す——追うなら論文68と同じくスピンの扉から、決してオイラーとディラックの定数を無理に一緒にしない。

§6. 主張の射程

確立されたこと

1. 4π と $(4\pi)^n n!$ （論文67・48）は Atiyah–Singer のオイラー分岐の規格化；ポアンカレ=ホップは「指数」の原型（命題3.1）。
2. インスタントンの $16\pi^2$ （論文45）はチャーン指標分岐の規格化——別分岐（命題3.2）。
3. 指数定理は言明を統一するが数を統一しない；分岐定数は別根、論文48の発見を上から説明（観察4.1）。

確立されていないこと／未解決問題

- ・新しい数学（Atiyah–Singer とその特別な場合は仮定・引用）。
- ・新しい物理、あるいは指数定理が体系を「導出する」こと。これは既知の定数を既知の家系に置く位置づけ。
- ・分岐の融合。オイラー・チャーン指標・ディラックの定数は別根のまま； $\hat{A}$ 種数の読みは方向のみ。
- ・未解決：山岸の構成のいずれかが、指数を計算される単一の楕円型作用素に対応するか（＝パッチ定数が規格化でなく文字通り $\text{index}(D)$ か）。あれば真の指数計算に、なければ家系内の規格化のまま。

§7. 結論

体系に繰り返し現れる定数には、古典的な実家がある：Atiyah–Singer 指数定理における特性類の規格化定数である。オイラー分岐の $4\pi = 2\pi\chi(S^2) \cdot (4\pi)^n n!$ （論文67・48）と、チャーン指標のインスタント $16\pi^2$ （論文45）は、同じ定理の異なる分岐に、異なる特性類から組み立てられて住む——ゆえに指数定理は「解析的指数＝位相的指数」という言明を統一しつつ、数を別根として残す（論文48・58の規律の通り）。かくしてパッチ定数は全偶数次元で位相的と証明され、由緒ある家系の名のある一員だと示される；そのスピン/ディラックの部屋——論文68のスピンの扉から達する——は、後日の訪問のために開かれたまま残る。

参考文献

1. Hopf, H. (1926). *Vektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten*. Math. Ann., 96, 225–249.
2. Chern, S.-S. (1944). *A simple intrinsic proof of the Gauss–Bonnet formula for closed Riemannian manifolds*. Ann. Math., 45, 747–752.
3. Hirzebruch, F. (1966). *Topological Methods in Algebraic Geometry*. 3rd ed., Springer.
4. Atiyah, M. F. & Singer, I. M. (1963). *The index of elliptic operators on compact manifolds*. Bull. Amer. Math. Soc., 69, 422–433.
5. Atiyah, M. F. & Singer, I. M. (1968). *The index of elliptic operators I*. Ann. Math., 87, 484–530.
6. Nakahara, M. (2003). *Geometry, Topology and Physics*. 2nd ed., IOP.
7. [Yamagishi 2026, Paper 45] *Strong CP and the Hopf Zero-Initialization*. Zenodo. [10.5281/zenodo.21602337](https://zenodo.org/record/21602337)
8. [Yamagishi 2026, Paper 48] *The Origin of Special Numbers and the Discipline of Non-Unification*. Zenodo. [10.5281/zenodo.21602525](https://zenodo.org/record/21602525)
9. [Yamagishi 2026, Paper 58] *The Factor Two as a Distinct Root*. Zenodo. [10.5281/zenodo.21597747](https://zenodo.org/record/21597747)
10. [Yamagishi 2026, Paper 67] *The Euler-Characteristic Origin of the 4π Patch*. Zenodo. [10.5281/zenodo.21642170](https://zenodo.org/record/21642170)
11. [Yamagishi 2026, Paper 68] *The Qubit as a Hopf Fibration*. Zenodo. [10.5281/zenodo.21642238](https://zenodo.org/record/21642238)

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)