分けても速くならない場合がある——決めているのは、分け方ではなく、まとめる仕事である

— $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ で、分ける側の指数は $\log_b a$ — 分離子は、分ける側とまとめる側のどちらが支配するか — [論文702]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— *From thinking to syncing.* —

要旨

分割統治は速くなる工夫だと説明される。だが分けたあとをまとめる仕事が重ければ、分割は何も得ていない。どちらが支配するかと、指数差が定数倍にいつ勝つかを数える。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、これが本稿の芯である。分けても得られないことがある——$a = 2 \cdot b = 2$ で、まとめる仕事が n なら $n \log n$ になるが、n^2 ならまとめる側が支配して n^2 のままである（第2節）。 第二に、支配するのは、二つの指数の大小だけである——分ける側の指数 $\log_b a$ とまとめる側の指数を比べ、大きいほうが答になる。等しければ対数が一つ付く（第2節）。 第三に、得られるときでも、得は小さい——シュトラッセンの指数 **2.807355** は素朴な 3.000000 より小さいが、差は **0.192645** しかない（第3節）。 第四に、その差は、定数倍の不利になかなか勝てない——定数が 2 倍不利なだけで追いつくのは $n > 36.527043$、5 倍なら $n > 4248.919974$、20 倍なら $n > 5669014.762747$ からである（第3節）。 第五に、指数差が大きければ、話は変わる——カラツバは指数 **1.584963** で差が **0.415037** あるので、2 倍の不利でも $n > 5.312610$ で追いつく（第3節）。 第六に、分離子は、分ける側とまとめる側のどちらが支配するかである——分け方の巧拙ではない。まとめる仕事の指数が大きければ、どう分けても同じである（第4節）。 キーワード：分割統治、マスター定理、計算量の指数、定数倍、交差点、漸近と実用。

> 本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——マスター定理の三つの場合、シュトラッセンとカラツバの指数は、いずれも既知である（コルメンほか 2009、クヌース 1997）。実装を測らない——実際の速さは測らない。定数倍 c は前提として置く代表値である。最良の指数を扱わない——行列積で現在知られている最良の指数（2.4 付近）には触れるだけで、扱わない。機械の事情を扱わない——メモリ階層、キャッシュ、並列化の効きは入れない。安定性を論じない——シュトラッセンの数値的な誤差の増え方は主題ではない。既刊との関係：論文681 は、クレーターの直径がエネルギーの 1/3.4 乗でしか増えず、重力支配の 0.294118 と強度支配の 1/3 の差 0.039216 が、桁を外挿するほど開くことを示した——そこでは指数差が外挿の危うさとして効いた。ここでは同じ指数差が、定数倍の不利をいつ追い越すかを決める。外挿ではなく交差点の側である。加えたのは、三つの場合を指数の比較で並べたこと、まとめる側が支配する場合に分割が何も得ないことを示したこと、指数差 **0.192645** と定数倍から交差点を出したこと、カラツバとシュトラッセンで交差点が一桁違うことを示したこと、分離子を「どちらが支配するか」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：大きさ n の問題を b 分の 1 に切って a 個解き、$f(n)$ でまとめるとする。

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n), \qquad e_{\text{分}} = \log_b a, \qquad f(n) = n^c$$

$e_{\text{分}} > c$ なら分ける側が、$e_{\text{分}} < c$ ならまとめる側が支配し、等しければ対数が一つ付く。

問い：分割統治は、いつ速くするのか。

2. どちらが支配するか

計算 2.1：代表的な組で、二つの指数を比べた。

a, b, f	$\log_b a$	支配	答
$2, 2, n$	1.000000	釣り合い	$n \log n$
$2, 2, n^2$	1.000000	まとめる側	n^2
$8, 2, n^2$	3.000000	分ける側	n^3
$7, 2, n^2$	2.807355	分ける側	$n^{2.807355}$
$3, 2, n$	1.584963	分ける側	$n^{1.584963}$
$4, 2, n$	2.000000	分ける側	n^2

> **観察 2.2**
>
> これが本稿の芯である。二行目では、分割が何も得ていない。$a = 2 \cdot b = 2$ で分けても、まとめる仕事が n^2 なら答は n^2 で、まったく分けない場合と同じ指数である——「分けたのだから速くなるはずだ」は、まとめる仕事を見ていない。

> **観察 2.3**
>
> 六行目も、同じことを別の側から言っている。$a = 4 \cdot b = 2$ なら分ける側の指数は 2.000000 で、素朴な乗算と同じである——分けた個数 a が多すぎれば、分けたこと自体が損になる。

> **観察 2.4**
>
> 釣り合いの場合だけ、対数が現れる。併合整列の $n \log n$ は、二つの指数がちょうど等しいことの帰結である——log は、どちらも支配していないときの印である。

3. 指数差は、定数倍になかなか勝てない

計算 3.1：シュトラッセンの指数は 2.807355 で、素朴な 3.000000 との差は 0.192645 である。定数倍 c の不利を背負ったとき、追いつく n を出した。

定数倍の不利	追いつく n
2 倍	36.527043
5 倍	4248.919974
20 倍	5669014.762747

> **観察 3.2**
>
> 定数の不利は、指数差の逆数乗で効く。2 倍から 5 倍へ 2.5 倍にしただけで、追いつく n は 36.527043 から 4248.919974 へ二桁動く——指数差が小さいほど、定数倍の代償は重くなる。

計算 3.3：カラツバの指数は 1.584963 で、素朴な 2 との差は 0.415037 である。2 倍の不利なら追いつくのは $n > 5.312610$ からである。

> **観察 3.4**
>
> 同じ「分割統治で指数が下がる」でも、実用になる境目が一桁違う。カラツバは 5.312610、シュトラッセンは 36.527043 から——指数がどれだけ下がったかではなく、下がり方が定数倍に見合っているかが問題である。

> **観察 3.5**
>
> だから「漸近的に速い」は、使える保証ではない。20 倍の不利なら追いつくのは $n > 5669014.762747$ で、扱う大きさがそこに届かなければ一度も速くならない——指数は無限遠の話で、定数は手元の話である。

4. 分離子

> **観察 4.1**
>
> 分離子は、分ける側とまとめる側のどちらが支配するかである。分け方の巧拙ではない。まとめる仕事の指数が大きければ、どう分けても答は同じである——改良の余地は、分け方ではなく、まとめ方の側にある。

> **観察 4.2**
>
> 論文681 と並べる。681 は、クレーターの直径がエネルギーの 1/3.4 乗でしか増えず、重力支配 0.294118 と強度支配 1/3 の差 0.039216 が、桁を外挿するほど開くことを示した——そこでは指数差が外挿の危うさとして効いた。ここでは同じ指数差が、定数倍の不利をいつ追い越すかを決める。外挿ではなく交差点の側である。

> **観察 4.3**
>
> 言わないこと。実装も機械の事情も安定性も扱わず、定数倍は前提の代表値である——示したのは、指数の比較と、指数差が定数倍に勝つ位置だけである。

5. 点呼と結び

1. $a=2 \cdot b=2 \cdot f=n$ は釣り合い（計算 2.1）：$n \log n$。
2. $f=n^2$ なら n^2 のまま（計算 2.1）：本稿の芯。分割は無駄。
3. $a=4 \cdot b=2$ でも n^2（計算 2.1）：分けすぎても損。
4. シュトラッセンは $\mathbf{2.807355}$（計算 3.1）：素朴な 3 より小さい。
5. 差は $\mathbf{0.192645}$（計算 3.1）：小さい。
6. 2 倍の不利で $n > \mathbf{36.527043}$（計算 3.1）：ここから得。
7. 5 倍なら $n > \mathbf{4248.919974}$（計算 3.1）：二桁動く。
8. 20 倍なら $n > \mathbf{5669014.762747}$（計算 3.1）：届かないことがある。
9. カラツバは $n > \mathbf{5.312610}$（計算 3.3）：指数差 $\mathbf{0.415037}$。
10. どちらが支配するか（観察 4.1）：分離子・論文681。

結び：分けても速くならない場合がある。$a=2 \cdot b=2$ で分けても、まとめる仕事が n^2 なら答は n^2 のままで、まったく分けない場合と同じ指数である——支配するのは、分ける側の指数 $\log_b a$ とまとめる側の指数の大小だけで、等しいときにだけ対数が一つ付く。得られるときでも、得は小さい——シュトラッセンの指数 2.807355 は素朴な 3.000000 より小さいが、差は 0.192645 しかない。だから定数が 2 倍不利なだけで追いつくのは $n > 36.527043$、5 倍なら $n > 4248.919974$、20 倍なら $n > 5669014.762747$ からである——指数は無限遠の話で、定数は手元の話である。指数差 0.415037 のカラツバなら、2 倍の不利でも $n > 5.312610$ で追いつく。分離子は、分ける側とまとめる側のどちらが支配するかである。既刊との位置——論文681 では指数差が外挿の危うさとして効いた。ここでは同じ差が交差点を決める。正直に言えば——実装も機械の事情も扱わず、定数倍は前提の代表値である。

参考文献

1. Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., & Stein, C. (2009). *Introduction to Algorithms*. MIT Press.
2. Knuth, D. E. (1997). *The Art of Computer Programming, Volume 2: Seminumerical Algorithms*. Addison-Wesley.

3. 山岸勇輝 (2026). 『クレーターの大きさは、衝突の激しさをほとんど記録しない』[論文681]. Zenodo. 10.5281/zenodo.23014796

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)