当たり率 0.99 でも、時間の半分以上は外れが使っている

— 当たり率 **0.99** のとき、時間のうち外れが使う割合は **0.502513**——わずか **0.01** の事象が、半分以上を持っていく — 分離子は、少数側の重みと比の積が **1** を超えるか — [論文705]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

当たり率 99 % と聞けば、ほとんど当たっていると思える。だが遅い側が 100 倍遅ければ、時間の半分以上はその 1 % が使っている。どちらが支配するかを、割合と比の積で数える。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、これが本稿の芯である。当たり率 0.99 で、時間の 0.502513 を外れが使う——わずか 0.01 の事象が、半分以上を持っていく（第2節）。 第二に、平均は理想の二倍になる——当たり率 0.99 の平均は 1.990000 サイクルで、外れがまったく無い場合の 2 倍近い（第2節）。 第三に、改善の効きは急に鈍る——0.90 → 0.99 は 5.477387 倍速くなるのに、0.99 → 0.999 は 1.810737 倍、0.999 → 0.9999 は 1.088227 倍にしかならない（第3節）。 第四に、鈍るのは、支配が入れ替わるからである——外れの重みが効かなくなる境目は、割合と比の積が 1 を下回るところ、すなわち当たり率 0.990000 ちょうどである（第3節）。 第五に、だから「当たり率」だけでは何も言っていない——同じ 0.99 でも、遅い側が 10 倍なら平均 1.090000、100 倍なら 1.990000、1000 倍なら 10.990000 サイクルになる（第3節）。 第六に、分離子は、少数側の重みと比の積が 1 を超えるかである——割合だけでも比だけでもなく、その積が支配を決める（第4節）。 キーワード：キャッシュの当たり率、平均アクセス時間、参照の局所性、アムダールの法則、支配する項、改善の効きの鈍り。

> 本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——平均アクセス時間の式、参照の局所性、アムダールの法則は、いずれも既知である（ヘネシー＆パターソン 2019、アムダール 1967）。構成を扱わない——階層、置換方式、連想度、書き込み方式は扱わない。局所性の由来を論じない——なぜプログラムが局所性を持つのかは主題ではない。数値を主張しない——当たり 1 サイクル・外れ 100 サイクルは代表値であり、機械で大きく動く。一般論に立ち入らない——アムダールの法則そのものの導出や、並列化の限界は扱わない。同じ形であることを述べるにとどめる。既刊との関係：論文702 は、分割統治が速くなるかどうかを、分ける側の指数 $\log_b a$ とまとめる側の指数の大小が決めることを示した——そこでは漸近の指数どうしが競った。ここでは有限の重みと有限の比の積が競う。どちらも「どちらが支配するか」で答が変わる型だが、片方は無限遠の話で、片方は手元の話である。加えたのは、当たり率ごとの平均と、外れが使う時間の割合を並べたこと、0.99 で **0.502513** という半分超えを示したこと、改善の効きの鈍りを **5.477387** → **1.810737** → **1.088227** と数にしたこと、境目が当たり率 **0.990000** ちょうどであることを示したこと、分離子を「重みと比の積が 1 を超えるか」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：当たれば t_h サイクル、外れれば t_m サイクルかかるとする。当たり率を h とすると、平均と、時間のうち外れが使う割合は次のようになる。

$$\bar{t} = h\,t_h + (1-h)\,t_m, \qquad \phi = \frac{(1-h)\,t_m}{\bar{t}}, \qquad (1-h)\frac{t_m}{t_h} < 1$$

$t_h = 1$、$t_m = 100$ を置く。右端が、外れの重みが効かなくなる条件である。

問い：「当たり率 99 %」は、何を言っているのか。

2. 時間の半分以上を、1 % が使う

計算 2.1：当たり率ごとに、平均と、時間のうち外れが使う割合を出した。

当たり率	平均	外れが使う割合
0.9000	10.900000 サイクル	0.917431
0.9900	1.990000 サイクル	0.502513
0.9990	1.099000 サイクル	0.090992
0.9999	1.009900 サイクル	0.009902

観察 2.2

これが本稿の芯である。0.01 の事象が、時間の 0.502513 を持っていく。回数で数えれば 1 % だが、時間で数えれば半分を超える——何を数えているかを言わなければ、同じ 0.99 が正反対の印象を与える。

観察 2.3

平均は理想の二倍近い。当たり率 0.99 の平均 1.990000 サイクルは、外れがまったく無い場合の 2 倍に近い——「ほとんど当たっている」と「ほとんど理想どおり」は、別のことである。

3. 改善の効きが鈍る位置

計算 3.1：当たり率を上げたときの速さの比を出した。0.90 → 0.99 で 5.477387 倍、0.99 → 0.999 で 1.810737 倍、0.999 → 0.9999 で 1.088227 倍である。

観察 3.2

同じ「桁を一つ減らす」努力が、桁ごとに効かなくなる。外れを 10 分の 1 にするという同じ仕事が、5.477387 倍から 1.088227 倍まで落ちる——改善の効きは、残っている支配の分だけしかない。

計算 3.3：外れの重みが効かなくなる境目は、割合と比の積が 1 を下回るところで、当たり率 0.990000 ちょうどである。

観察 3.4

境目は、ちょうど表の二行目に来ている。0.99 を境に、外れが支配する側から当たりが支配する側へ移る——改善が鈍るのは努力が足りないからではなく、支配が入れ替わったからである。

> **観察 3.5**
>
> だから「当たり率」だけでは何も言っていない。同じ **0.99** でも、遅い側が 10 倍なら平均は **1.090000**、100 倍なら **1.990000**、1000 倍なら **10.990000** サイクルである——当たり率と比は対にして初めて意味を持つ。

4. 分離子

> **観察 4.1**
>
> 分離子は、少数側の重みと比の積が **1** を超えるかである。割合が小さくても比が大きければ支配し、比が大きくても割合が十分小さければ支配しない——どちらか一方だけを見て「もう十分だ」と言えない。

> **観察 4.2**
>
> 論文**702** と並べる。**702** は、分割統治が速くなるかどうかを、分ける側とまとめる側の指数の大小が決めることを示した——そこでは漸近の指数どうしが競い、答は無限遠で決まった。ここでは有限の重みと有限の比の積が競い、境目が当たり率 **0.990000** という手元の数に来る。同じ「どちらが支配するか」でも、決まる場所が違う。

> **観察 4.3**
>
> 言わないこと。構成も局所性の由来も扱わず、サイクル数は代表値である——示したのは、割合と比の積が支配を決めることだけである。

5. 点呼と結び

1. **0.99** で平均 **1.990000** サイクル（計算 2.1）：理想の二倍近い。
2. 外れが時間の **0.502513**（計算 2.1）：本稿の芯。
3. **0.90** なら平均 **10.900000**（計算 2.1）：完全に外れが支配。
4. **0.9999** で **1.009900**（計算 2.1）：ようやく理想に近い。

5. **0.90 → 0.99 は 5.477387 倍**（計算 3.1）：よく効く。
6. **0.99 → 0.999 は 1.810737 倍**（計算 3.1）：鈍りはじめる。
7. **0.999 → 0.9999 は 1.088227 倍**（計算 3.1）：ほとんど効かない。
8. **境目は 0.990000**（計算 3.3）：支配が入れ替わる。
9. **比が 1000 倍なら 10.990000**（観察 3.5）：当たり率だけでは足りない。
10. **重みと比の積**（観察 4.1）：**分離子・論文702**。

結び：当たり率 0.99 でも、時間の半分以上は外れが使っている。当たり 1 サイクル・外れ 100 サイクルなら、当たり率 0.99 の平均は 1.990000 サイクルで、時間のうち外れが使う割合は 0.502513 になる——回数で数えれば 1 % だが、時間で数えれば半分を超える。改善の効きは急に鈍り、0.90 → 0.99 の 5.477387 倍が、0.99 → 0.999 で 1.810737 倍、0.999 → 0.9999 で 1.088227 倍になる。鈍るのは努力が足りないからではない。外れの重みが効かなくなる境目が当たり率 0.990000 ちょうどにあり、そこで支配が入れ替わるからである——同じ 0.99 でも、遅い側が 1000 倍なら平均は 10.990000 サイクルになる。当たり率と比は、対にして初めて意味を持つ。分離子は、少数側の重みと比の積が 1 を超えるかである。既刊との位置——論文702 では漸近の指数どうしが競い、答は無限遠で決まった。ここでは有限の重みと比の積が競い、境目が手元の数に来る。正直に言えば——構成も局所性の由来も扱わず、サイクル数は代表値である。

参考文献

1. Amdahl, G. M. (1967). Validity of the single processor approach to achieving large scale computing capabilities. *AFIPS Conference Proceedings*.
2. Hennessy, J. L., & Patterson, D. A. (2019). *Computer Architecture: A Quantitative Approach*. Morgan Kaufmann.
3. 山岸勇輝 (2026).『分けても速くならない場合がある——決めているのは、分け方ではなく、まとめる仕事である』[論文702]. Zenodo. 10.5281/zenodo.23014909

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)