

ボルン則の「2」と Gleason の定理

— 幾何学的な読みを、より強い導出の下に置く —

そして量子ビット、Gleason が黙る場所

著者: 山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

所属: Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

投稿区分: 論文71 (Paper 71) | Zenodo: 10.5281/zenodo.21650577

Category: 物理学 / 量子基礎 / 構造的解釈

キーワード: ボルン則, Gleason の定理, 非文脈性, POVM, 量子ビット, Hopf 束, 測定問題

— From thinking to syncing. —

本稿の位置づけ

本稿は構造的解釈であり、何より知的な謙抑の実践である。ボルン則を標準結果より上手く導出しない；むしろ、論文 53・68 で与えた指数~2 の幾何学的な読みを、より弱い仮定（非文脈性と加法性）からボルン則を導く Gleason の定理の下に置く。体系に有利な、真に興味深い一点を記す：量子ビット——論文68の Hopf の場合——は、射影版 Gleason が破れるまさにその2次元の場合であり、幾何学的描像が Gleason の盲点をちょうど埋める（厳密には POVM 版でのみ回復）。本稿は測定問題を解かず、新しい物理も主張しない。既存理論と矛盾する主張は含まない。

概要

論文53・68 はボルン則の指数~2 を双一次の「2」と読んだ： $p = |\psi|^2 = \langle \psi | P | \psi \rangle$ 、Hopf（ブロッホ）写像と同じ2次形式。本稿は正直な問い——「なぜ2」は導出か単に仮定か——を立て、幾何学的な読みを王道の厳密結果の下に置く。Gleason の定理（1957）は、次元 ≥ 3 で、射影束上の非文脈的で可算加法的な測度が $\mu(P) = \text{Tr}(\rho P)$ の形を持つと示す；純粋状態ではこれがボルン則で、指数~2 も含めて、 $|\psi|^2$ を仮定するより厳密に弱い仮定から導出される。ゆえに明確な階層：Gleason（および量子ビットを含む全次元で Busch 2003 の POVM 拡張）が導出、論文53・68 の読みは幾何学的描像——導出としては従属、描像としては相補的。次に、描像が包摂されない唯一の場所：射影版 Gleason は $\dim \geq 3$ を要し、量子ビット（ $\dim 2$ ）で破れる——それこそ論文68の Hopf の場合。最後に論文68の「2たちの点呼」を閉じる：Gleason は双一次形式がなぜ強制されるか（非文脈性）を説明し、共有根 $\text{Born} = \text{Hopf}$ を基礎づける。Gleason も本稿も測定問題（確定した結果）には触れず、別根の規律は保たれる。

§1. 序論

論文53 は指数 -2 を二つの構造的経路（ $\int |\psi|^2$ のユニタリ保存；外向き球面波の r^{-2} フラックス）から論じたが、確率密度が $|\psi|$ の冪という仮定を要しない Gleason の定理より弱いと明示していた。論文68 はこの指数を量子ビット上の2次の Hopf（ブロッホ）写像と同定した：ボルンの「**2**」と Hopf 写像の「**2**」は同じ双一次の根 $\langle \psi | A | \psi \rangle$ 。

本稿は正直な次の一步を踏む。論文53・68 が指数の読みを与えるなら、何がそれを導出するのか。答えは古典的結果——Gleason の定理——であり、規律ある振る舞いは、幾何学的な読みをその横でなく下に置くことである。そうする中で、幾何学的描像に真に有利な一点が見つかる：量子ビット、まさに論文68の対象は、射影版 Gleason が適用されない次元である。

本稿が行わないこと。Gleason を上回る導出はしない（譲る）、測定問題に触れない、物理も加えない。既知の結果を、論理的な強さの正しい順序に並べる。

§2. Gleason の定理（確立）

定理 2.1 (Gleason 1957)

$\mathcal{H}$ を $\dim \mathcal{H} \geq 3$ のヒルベルト空間とする。 μ が各射影 P に $\mu(P) \in [0, 1]$ を割り当て、 $\mu(1) = 1$ かつ互いに直交する射影の族上で可算加法的（非文脈性： $\mu(P)$ が P の属する直交分解に依らない）とする。このとき一意な密度作用素 ρ が存在し、

$$\mu(P) = \text{Tr}(\rho P) \quad \text{すべての } P.$$

純粋状態 $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ とランク1射影 $P = |\varphi\rangle\langle\varphi|$ に対し、

$$\mu(P) = \langle \psi | P | \psi \rangle = |\langle \varphi | \psi \rangle|^2$$

これはボルン則、指数**2**を含む。ゆえに指数は公理でなくこの帰結であり、それ自身が非文脈性と加法性から従う。Gleason の非文脈性は、その決定論版が Kochen–Specker の定理（1967）で禁じられる構造的入力と同じもの；Gleason はそれを測度に用い（そこでは整合的）、ボルンを一意に導く。

§3. 正直な階層

命題 3.1 (強さの順序)

ボルン則の指数~2 について：

1. **Gleason (導出)**。 $\dim \geq 3$ で、指数~2 は非文脈性と加法性から導出される (定理2.1)。「確率 $= |\psi|^{\text{冪}}$ 」の仮定は一切なし。
2. **論文53・68 (描像)**。論文53 は確率密度が $|\psi|$ の冪と仮定した上で冪~2 を選び出す；論文68 は双一次形式 $\langle \psi | A | \psi \rangle$ を仮定しその「2」を Hopf 写像として読む。両者は導出としては弱い (Gleason が結論することの一部を仮定する) が、Gleason が与えない幾何学的描像を供する：量子ビット上で「2」は2次の Hopf 写像、ボルン確率はブロッホ・ベクトルの極射影 $p_0 = (1 + n_z)/2$ 。

ゆえに正しい配置は並列でなく階層的：Gleason が導出、論文53・68 はその下の描像。

これが規律ある読みである。体系の「なぜ 2」への寄与は、競合する導出ではなく幾何；Gleason に譲ることは敗北でなく、自らの仕事を論理的強さの正しい順序に置くこと。

§4. 量子ビット：Gleason が黙る場所

観察 4.1 (射影版 Gleason は2次元で破れる)

定理2.1 は $\dim \mathcal{H} \geq 3$ を要する。量子ビット ($\dim \mathcal{H} = 2$) では破れる： $\mathbb{C}^2$ 上で恒等の直交分解は対 $\{P, 1 - P\}$ のみで、加法性は各射影をその一意の補元にしか結びつけないので、トレース形でない非文脈的測度の余地が残る。ゆえに射影版 Gleason は1個の量子ビットのボルン則を導出しない。

これはまさに論文68の対象：状態空間が Hopf 束 $S^3 \rightarrow S^2$ である量子ビット。Gleason の例外の場合と Hopf の場合が一致する。二つの帰結——一つは正直な譲歩、一つは正直な功績。

- **譲歩**。量子ビットについてのボルンの厳密な導出は射影版でなく POVM 拡張である：Busch (2003) と Caves–Fuchs–Manne–Renes (2004) は、正効果の集合上の非文脈的測度があらゆる次元で $\text{Tr}(\rho E)$ と示す、量子ビットを含めて。量子ビット上のボルンは——POVM 版 Gleason によって——導出される。

- 功績。射影版 Gleason が **dim 2** で黙るので、論文68の幾何学的な読みはそこでは包摂されない。古典的な射影の定理が何も言わない唯一の対象で、体系は描像を供する：指数~2は2次の Hopf 写像、ベリー位相を通じて測定可能（論文68）。描像は、まさに **Gleason** の盲点でその値打ちを示す。

§5. 2たちの点呼を閉じる

論文68は「2たちの点呼」を組み、ただ一つの共有根を見出した：ボルンの~2と Hopf 写像の~2はいずれも双一次形式 $\langle \psi | A | \psi \rangle$ 。その点呼は一致を同定したが、なぜ双一次形式が物理の用いるものかは説明しなかった。

系 5.1（Gleason が共有根を基礎づける）

Gleason が欠けた「なぜ」を供する：**dim ≥ 3** で（POVM 拡張で全次元で）、非文脈性と加法性が測度を **Tr(ρP)**——双一次形式——に強制する。論文68の共有根（Born = Hopf = 双一次）は記法の偶然でなく非文脈性の帰結。他の2たち（空間 **$n = 2$** 、位相 **$\chi = 2$** 、トレース反転 **2**、スピノル **2**）は別根のまま；Gleason は双一次のものだけを基礎づける。

§6. 主張の射程

確立されたこと

1. ボルンの指数~2は Gleason（**dim ≥ 3** ）と、量子ビットを含む全次元で POVM 拡張により導出される（定理 2.1；観察4.1）。
2. 論文53・68の読みは、導出としては Gleason に従属、描像としては相補的（命題3.1）。
3. 射影版 Gleason は量子ビット（論文68の Hopf の場合）で黙る（観察4.1）；Gleason は点呼の双一次の共有根を基礎づける（系5.1）。

確立されていないこと／未解決問題

- ・ Gleason の改良（本稿は譲る；幾何学的な読みは描像であって競合する導出ではない）。
- ・ 測定問題の解決（Gleason も本稿も確率則を扱い、確定した結果の生起は説明しない）。
- ・ Gleason が基礎づける単一の双一次根を超えた、点呼の2たちの融合。
- ・ 未解決：Hopf 球面上で内在的に定式化された非文脈性のような原理で、1個の量子ビットのボルンを幾何学的に導出できるか（ $\mathbf{S}^3 \rightarrow \mathbf{S}^2$ から POVM 版 Gleason が代数的に供するものを回復）。あれば論文68の描像は自らの土俵で導出となる。

§7. 結論

ボルンの指数~2——論文53・68が双一次/Hopfの「2」として読んだもの——は導出される。それらの読みによってではなく、Gleasonの定理によって、非文脈性と加法性から、次元3以上で、そしてPOVM拡張により全次元で。正直な配置は階層的：Gleasonが導出、幾何はその下の描像。描像が包摂されない唯一の場所は量子ビットで、そこでは射影版Gleasonが黙り、論文68のHopfの読みがちょうどその隙間を埋める。Gleasonはまた、双一次形式を強制することで論文68の点呼を基礎づける。Gleasonも本稿も測定問題には触れず、別根は別根のまま。より強い定理に譲り、その下で生き残る幾何だけを保つこと——それが、体系が自らの量子的な礎に対して行う規律である。

参考文献

1. Born, M. (1926). *Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge*. Z. Phys., 37, 863–867.
2. von Neumann, J. (1932). *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Springer.
3. Gleason, A. M. (1957). *Measures on the closed subspaces of a Hilbert space*. J. Math. Mech., 6, 885–893.
4. Kochen, S. & Specker, E. P. (1967). *The problem of hidden variables in quantum mechanics*. J. Math. Mech., 17, 59–87.
5. Busch, P. (2003). *Quantum states and generalized observables: a simple proof of Gleason's theorem*. Phys. Rev. Lett., 91, 120403.
6. Caves, C. M., Fuchs, C. A., Manne, K. K. & Renes, J. M. (2004). *Gleason-type derivations of the quantum probability rule for generalized measurements*. Found. Phys., 34, 193–209.
7. Mosseri, R. & Dandoloff, R. (2001). *Geometry of entangled states, Bloch spheres and Hopf fibrations*. J. Phys. A, 34, 10243–10252.
8. [Yamagishi 2026, Paper 48] *The Origin of Special Numbers and the Discipline of Non-Unification*. Zenodo. [10.5281/zenodo.2160252](https://zenodo.org/record/2160252)
9. [Yamagishi 2026, Paper 53] *A Geometric Derivation of the Born Rule Exponent*. Zenodo. [10.5281/zenodo.2160319](https://zenodo.org/record/2160319)
10. [Yamagishi 2026, Paper 58] *The Factor Two as a Distinct Root*. Zenodo. [10.5281/zenodo.2159774](https://zenodo.org/record/2159774)
11. [Yamagishi 2026, Paper 68] *The Qubit as a Hopf Fibration*. Zenodo. [10.5281/zenodo.2164223](https://zenodo.org/record/2164223)

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)