

ブラックホール・エントロピーの「1/4」

— 立体角 4π ・オイラー標数・等分配で錨づける —

因果球を Jacobson の地平線に置く

著者: 山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

所属: Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

投稿区分: 論文73 (Paper 73) | Zenodo: 10.5281/zenodo.21666086

Category: 物理学 / 重力熱力学 / 構造的解釈

キーワード: ブラックホール・エントロピー, ベケンシュタイン--ホーキング, 係数1/4, 立体角, オイラー標数, 等分配, Jacobson, 因果球

— *From thinking to syncing.* —

本稿の位置づけ

本稿は構造的解釈である。ブラックホール・エントロピーの微視的導出は行わない（弦理論やループ量子重力が試みる量子微視状態の数え上げをしない）；ベケンシュタイン--ホーキングの面積則は仮定する。行うのは係数 $1/4$ の錨づけ： $1/4$ が、空間的な地平線の 4π （立体角、＝論文67の $2\pi\chi(S^2)$ ）と、熱的なユークリッド時間の 2π ——論文58の規律により別根——、および表面重力の因子から成る複合であることを示す。また論文65の因果球エントロピーを Jacobson の局所地平線に置く。既存理論と矛盾する主張は含まない。

概要

ベケンシュタイン--ホーキング・エントロピー $S = A/(4l_P^2)$ は有名な係数 $1/4$ を持つ。本稿はこれを構造的に錨づける。シュワルツシルト地平線の第一法則による導出で、ホーキング温度 $T = \hbar\kappa/(2\pi ck_B)$ は 2π （ユークリッド時間の周期、 S^1 ）を、地平線面積 $A = 4\pi r_g^2$ は 4π （空間的2球面の立体角、論文67により $2\pi\chi(S^2)$ 、位相量）を寄与する。表面重力 $\kappa = c^4/(4GM)$ と合わさって A/l_P^2 の係数を厳密に $1/4$ に固定する。ゆえに $1/4$ は単一の謎の数でなく、熱的 2π と空間的 4π の複合であり、論文48・58の規律によりそれらは別根（虚時間の円対空間の球）である（命題3.1）。等分配（Padmanabhan）： $N = A/l_P^2$ 個の地平線セルで $S = N/4$ ——4プランク面積あたり1ビット。最後に論文65の因果球エントロピー（ $S = \pi c^5$ 、指数 $5 = 2 + 3$ ）を Jacobson の局所リンドラー地平線に置く：論文61の因果球 $r = ct$ はそのような地平線で、その $1/4$ は同じ複合起源を持つ。これが錨づけであって微視的導出でないことを明示する。

§1. 序論

ベケンシュタインはブラックホールのエントロピーが地平線面積に比例すると論じ、ホーキングの温度が係数を $S = A/(4l_p^2)$ に固定した。以来 $1/4$ は的である：良い微視理論はこれを再現すべきだと。弦理論とループ量子重力は微視状態を数えてそうする。本稿はより慎ましく、体系の精神ではより構造的なことを行う： $1/4$ を錨づける（どの幾何学的因子が組み立てるかを示す）とともに、論文65の因果球エントロピーを Jacobson の熱力学的枠組みに置く。

体系からの二素材：球の 4π が位相量 $2\pi\chi(S^2)$ と示した論文67、因果球のエントロピーを c 階段で $S = \pi c^5$ と読んだ論文65。

本稿が行わないこと。微視状態を数えず、面積則を導出しない（仮定）。 $1/4$ を分解し、論文65 を Jacobson 地平線に置く。

§2. $1/4$ の組み立て

質量 M のシュワルツシルト・ブラックホール：

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}, \quad A = 4\pi r_s^2 = \frac{16\pi G^2 M^2}{c^4}, \quad \kappa = \frac{c^4}{4GM}, \quad T_H = \frac{\hbar\kappa}{2\pi c k_B} = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M k_B}$$

第一法則 $dE = T_H dS$ ($E = Mc^2$) より

$$dS = \frac{c^2 dM}{T_H} = \frac{2\pi}{\hbar\kappa} c^2 dM = \frac{8\pi G k_B}{\hbar c^2} M dM \Rightarrow S = k_B \frac{A}{4l_p^2}$$

命題 3.1 (1/4 は熱的 2π と空間的 4π の複合)

A/l_P^2 の係数 $1/4$ は、起源の異なる二つの幾何学的因子から組み立てられる：

- 熱的 2π ：ユークリッド時間の周期（円錐特異性を持たないことが $T_H = \hbar\kappa/2\pi$ を固定する S^1 ）；
- 空間的 4π ：地平線2球面の立体角 $A = 4\pi r_g^2$ 、論文67により $2\pi\chi(S^2)$ ——位相量；

および $\kappa = c^4/(4GM)$ からの表面重力の有理因子。温度の $2\pi/\kappa$ と面積の 4π が組み合わせあって $S = A/(4l_P^2)$ 。

論文48・58の規律により、熱的 2π （虚時間の円 S^1 ）と空間的 4π （実空間の球 S^2 ）は別根である：たまたま係数の中で組み合わせる異なる幾何学的対象。「1/4」は、説明すべき一つの数でなく、二つの残余である。

§3. 等分配の読み

観察 4.1 (4プランク面積あたり1ビット)

地平線を敷き詰めるプランク面積セルの数を $N = A/l_P^2$ と書くと、 $S = \frac{1}{4}Nk_B$ となる。これは Padmanabhan が強調した地平線自由度の等分配の形：地平線は N 個の表面自由度を担い、エントロピーはその数の四分の一——4プランク面積あたり1ビット。面積則は創発/熱力学的重力のプログラム——ロードマップで同定した隣人——に自然に収まる。

§4. 因果球を Jacobson の地平線に置く

Jacobson (1995) は、各時空点を通る局所リンドラー地平線にクラウジウス関係 $\delta Q = T \delta S$ を $S = A/(4l_P^2)$ とウソルー温度で適用し、アインシュタイン方程式を導いた。そこでは面積則が入力・重力が出力で、1/4 はまさに熱力学が $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}/c^4$ を再現する係数。

系 5.1 (論文65 は Jacobson 地平線に座る)

論文61の因果(光)球 $r = ct$ は、Jacobson が用いるまさにその種類の局所因果地平線である。そのベケンシュタイン--ホーキング・エントロピーは論文65の $S = \pi c^5$ (c 階段・指数 $5 = 2 + 3$)。その係数 $1/4$ は命題3.1 の複合起源：因果球は空間的 S^2 (論文67の $4\pi = 2\pi\chi$)、局所ウンルー温度は熱的 2π 。ゆえに論文61・65・67 は、因果球の上でブラックホール地平線と同じ $1/4$ を組み立てる。

これはアークを閉じる：論文65の因果球エントロピーは独立した珍奇物でなく、Jacobson 地平線のベケンシュタイン--ホーキング・エントロピーであり、その係数は論文67の位相的 4π で錨づけられる。

§5. 主張の射程

確立されたこと

1. 第一法則の導出で、 $1/4$ は熱的ユークリッド 2π と空間的地平線 $4\pi = 2\pi\chi(S^2)$ (論文67) の複合で、両者は別根 (命題3.1)。
2. 同値に $S = N/4$ 、 $N = A/l_P^2$ 、4プランク面積あたり1ビット (観察4.1)。
3. 論文61の因果球は Jacobson 地平線；論文65のエントロピーはそのBHエントロピーで、同じ複合 $1/4$ (系5.1)。

確立されていないこと／未解決問題

- ・ ブラックホール・エントロピーの微視的導出。量子微視状態は数えず、面積則は仮定 (導出でない)。
- ・ $1/4$ が、微視状態の数え上げが説明する意味で「説明された」こと。幾何学的因子に分解したのであり弱い。
- ・ 熱的 2π と空間的 4π の融合。両者は別根のまま (命題3.1)；複合は単一の起源でない。
- ・ 未解決：因果球の「セル」やプランク面積タイルの数え上げで、 $S = A/4$ を熱力学的係数でなく実際の状態数として再現できるか？ それは錨づけを微視的導出へ昇格させる；ここでは試みない。

§6. 結論

ベケンシュタイン--ホーキング・エントロピーの係数 $1/4$ は単一の謎の数ではない。第一法則の導出では、熱的 2π (ユークリッド時間の円) と空間的 4π (地平線球の立体角、論文67により $2\pi\chi(S^2)$)、および表面重力の因子から組み立てられる；二つの幾何学的入力は別根。等分配で読めば $S = N/4$ 、4プランク面積あたり1ビット。論文61の因果球は Jacobson 地平線ゆえ、論文65の因果球エントロピーはそのBHエントロピーで、その $1/4$ は論文67の位相的 4π で錨づけられる。これは創発重力の隣人における構造的錨づけであって微視的導出ではない——地平線熱力学で最も有名な数について、体系が正直に言えることである。

参考文献

1. Bekenstein, J. D. (1973). *Black holes and entropy*. Phys. Rev. D, 7, 2333–2346.
2. Hawking, S. W. (1975). *Particle creation by black holes*. Commun. Math. Phys., 43, 199–220.
3. Gibbons, G. W. & Hawking, S. W. (1977). *Action integrals and partition functions in quantum gravity*. Phys. Rev. D, 15, 2752–2756.
4. Jacobson, T. (1995). *Thermodynamics of spacetime: the Einstein equation of state*. Phys. Rev. Lett., 75, 1260–1263.
5. Wald, R. M. (1993). *Black hole entropy is the Noether charge*. Phys. Rev. D, 48, R3427–R3431.
6. Padmanabhan, T. (2010). *Thermodynamical aspects of gravity: new insights*. Rep. Prog. Phys., 73, 046901.
7. [Yamagishi 2026, Paper 12] *The Einstein–Yamagishi Volume Restoration Equation*. Zenodo. [10.5281/zenodo.21404703](https://zenodo.org/record/21404703)
8. [Yamagishi 2026, Paper 58] *The Factor Two as a Distinct Root*. Zenodo. [10.5281/zenodo.21597747](https://zenodo.org/record/21597747)
9. [Yamagishi 2026, Paper 61] *The Light Sphere $r = ct$* . Zenodo. [10.5281/zenodo.21598127](https://zenodo.org/record/21598127)
10. [Yamagishi 2026, Paper 65] *The Bekenstein–Hawking Entropy of the Causal Sphere and c^5* . Zenodo. [10.5281/zenodo.21616466](https://zenodo.org/record/21616466)
11. [Yamagishi 2026, Paper 67] *The Euler-Characteristic Origin of the 4π Patch*. Zenodo. [10.5281/zenodo.21642170](https://zenodo.org/record/21642170)

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)