紙を硬くする二つの手は、紙を増やすか増やさないかで違っても、剛性では完全に同じである

— 坪量を 80 から 100 g/m² に増やしても、坪量を変えずに密度を 20 % 下げても、厚さは同じ 0.125000 mm、剛性は同じ 1.953125 倍になる — 分離子は、求めている量が単位面積あたりの質量か、曲げ剛性か — [論文732]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

紙の厚みは坪量という単位で言い表される。それは単位面積あたりの質量であって、硬さではない。硬くする二つの手が、剛性の上では区別できないことを示す。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、曲げ剛性は厚さの三乗で効く——坪量 80 g/m²・密度 800 kg/m³ で厚さ 0.100000 mm、剛性 2.500000×10^{-4} N m である（第2節）。 第二に、坪量を 25 % 増やすと剛性は倍近くになる——1.953125 倍で、厚さの比 1.25 の三乗と一致する（第2節）。 第三に、これが本稿の芯である。坪量を変えずに密度を 20 % 下げても、同じ 1.953125 倍になる——二つの比の差は 0 で、紙を増やさずに同じ硬さが手に入る（第3節）。 第四に、密度を上げると逆に柔らかくなる——同じ坪量でも 1000 kg/m³ なら 0.512000 倍に落ちる（第3節）。 第五に、だから坪量は硬さの単位ではない——同じ坪量で剛性が 0.512000 倍から 1.953125 倍まで動く（第3節）。 第六に、分離子は、求めている量が単位面積あたりの質量か、曲げ剛性かである——注文の単位と、欲しい性質がずれている（第4節）。 キーワード：坪量、曲げ剛性、厚さの三乗、嵩高さ、密度、注文の単位と欲しい性質。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——坪量の定義、曲げ剛性が厚さの三乗に比例すること、嵩高い紙のほうが同じ坪量で硬いことは、いずれも標準的である（ティモシェンコ 1930、ニスカネン 1998）。代表値に精度を主張しない——弾性率 3.0 GPa、密度 800 kg/m³ は桁を見るための値である。異方性を扱わない——縦目と横目で剛性が違うことは扱わない。ほかの性質を扱わない——嵩高くすると平滑性、印刷適性、不透明度が変わることは扱わず、剛性だけを見る。実在の紙を主張しない——銘柄や規格の値は扱わない。壊れ方を扱わない——座屈、折り目、湿度による変化は扱わない。既刊との関係：論文590 は、紙飛行機にクリップを付けても飛ぶ距離は変わらないことを示し、坪量 80 g/m² から A4 一枚を 4.9896 g と出した——そこでは坪量が質量を出すための入力で、その質量が距離の式に入らないことが結論だった。ここでは同じ坪量を厚さに換算して、三乗で剛性に入ることを示す。質量として使う坪量と、厚さとして使う坪量になる。加えたのは、坪量から厚さを経て剛性までを出したこと、坪量を増やす場合と密度を下げる場合で比が一致することを示したこと、密度を上げたときの目減りを 0.512000 倍と出したこと、同じ坪量で剛性が動く幅を示したこと、分離子を「質量か、剛性か」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：坪量は単位面積あたりの質量である。厚さは坪量を密度で割った値で、単位幅の曲げ剛性は厚さの三乗に比例する。

$$t = \frac{g}{\rho}, \qquad D = \frac{E t^3}{12}$$

g は坪量、ρ は密度、E は弾性率である。$E = 3.0\ \mathrm{GPa}$ を代表値として置く。

問い：坪量は、何を決めているのか。

2. 坪量を増やせば、三乗で硬くなる

計算 2.1：坪量と密度の組ごとに、厚さと単位幅の曲げ剛性を出した。

坪量	密度	厚さ	曲げ剛性
80 g/m²	800 kg/m³	0.100000 mm	2.500000×10^{-4} N m
100 g/m²	800 kg/m³	0.125000 mm	4.882812×10^{-4} N m
80 g/m²	640 kg/m³	0.125000 mm	4.882812×10^{-4} N m
80 g/m²	1000 kg/m³	0.080000 mm	1.280000×10^{-4} N m

観察 2.2

坪量を 25 % 増やすと、剛性は 1.953125 倍になる。厚さの比 1.25 の三乗と、10^{-12} 以内で一致する——25 % 多く紙を使って、倍近い硬さが返ってくる。

観察 2.3

三乗で効くのは、断面の形から来ている。曲げに抗するのは、中立面から遠い繊維である——厚くすれば、遠い繊維が増えるだけでなく、その距離も伸びる。

3. 紙を増やさない手も、同じだけ効く

観察 3.1

これが本稿の芯である。表の二行目と三行目は、剛性がまったく同じである。坪量を 100 g/m² に増やした場合と、坪量を 80 g/m² のまま密度を 20 % 下げた場合で、厚さも剛性も一致し、二つの比の差は 0 である——一方は紙を 25 % 多く使い、他方は同じ量しか使っていない。

観察 3.2

だから「硬い紙」の注文は二通りに満たせる。坪量を上げるか、嵩高くするかである——剛性だけを見るかぎり、受け取る側にはどちらか分からない。

観察 3.3

逆向きも成り立つ。同じ坪量で密度を 1000 kg/m³ に上げると、剛性は 0.512000 倍に落ちる——押し固めた紙は、同じ重さでも柔らかい。

観察 3.4

だから坪量は硬さの単位ではない。同じ 80 g/m² のまま、剛性は 0.512000 倍から 1.953125 倍まで動く——坪量を指定しても、硬さは指定していない。

観察 3.5

嵩高くすることは無料ではない。平滑性や不透明度といった別の性質が動く——本稿はそれを数えないが、剛性だけを見て選べるわけではないことは書いておく。

4. 分離子

観察 4.1

分離子は、求めている量が単位面積あたりの質量か、曲げ剛性かである。注文の単位は前者で、欲しい性質は後者である——二つは密度を通してしかつながらないので、密度を言わなければ注文が定まらない。

観察 4.2

論文590 と並べる。590 は、紙飛行機にクリップを付けても飛ぶ距離は変わらないことを示し、坪量から質量を出した——そこでは坪量が質量の入力で、その質量が距離に入らなかった。ここでは同じ坪量が厚さの入力で、三乗で剛性に入る。同じ量の、二つの使い方である。

観察 4.3

言わないこと。異方性も、平滑性も、実在の銘柄も、壊れ方も扱わず、二つの代表値は固定した——示したのは、坪量が硬さを決めていないことである。

5. 点呼と結び

1. 厚さ $\mathbf{0.100000}$ mm（計算 2.1）：80 g/m²・800 kg/m³。
2. 剛性 $\mathbf{2.500000 \times 10^{-4}}$ N m（計算 2.1）：基準。
3. 坪量 100 で $\mathbf{4.882812 \times 10^{-4}}$（計算 2.1）：紙を増やす手。
4. 密度 640 でも $\mathbf{4.882812 \times 10^{-4}}$（計算 2.1）：増やさない手。
5. 比はどちらも $\mathbf{1.953125}$ 倍（観察 3.1）：本稿の芯。
6. 二つの比の差は $\mathbf{0}$（観察 3.1）：区別できない。

7. 厚さの比の三乗と一致（観察 2.2）：10^{-12} 以内。
8. 密度 1000 で **0.512000** 倍（観察 3.3）：押し固めると柔らかい。
9. 同じ坪量で幅がある（観察 3.4）：硬さは指定されない。
10. 質量か、剛性か（観察 4.1）：分離子・論文590。

結び：紙を硬くする手は二つあり、片方は紙を増やし、もう片方は増やさない。剛性の上では二つは完全に同じである。曲げ剛性は厚さの三乗で効くので、坪量 80 g/m² ・密度 800 kg/m³ の厚さ 0.100000 mm ・剛性 2.500000×10^{-4} N m に対し、坪量を 100 g/m² に増やすと厚さ 0.125000 mm ・剛性 4.882812×10^{-4} N m で 1.953125 倍になる——厚さの比 1.25 の三乗と 10^{-12} 以内で一致する。ところが坪量を変えずに密度を 20 % 下げても厚さは同じ 0.125000 mm になり、剛性も同じ 1.953125 倍で、二つの比の差は 0 である——一方は紙を 25 % 多く使い、他方は同じ量しか使っていないのに、剛性だけを見る側にはどちらか分からない。逆向きも成り立ち、同じ坪量で密度を 1000 kg/m³ に上げると剛性は 0.512000 倍に落ちる——押し固めた紙は、同じ重さでも柔らかい。だから坪量は硬さの単位ではない——同じ 80 g/m² のまま、剛性は 0.512000 倍から 1.953125 倍まで動くので、坪量を指定しても硬さは指定していない。ただし嵩高くすることは無料ではなく、平滑性や不透明度といった別の性質が動く——本稿はそれを数えないが、剛性だけを見て選べるわけではないことは書いておく。分離子は、求めている量が単位面積あたりの質量か、曲げ剛性かである。既刊との位置——論文590 では坪量が質量の入力で、その質量が距離に入らなかった。ここでは同じ坪量が厚さの入力で、三乗で剛性に入る。正直に言えば——異方性も平滑性も実在の銘柄も扱わず、二つの代表値は固定した。

参考文献

1. Niskanen, K. (1998). *Paper Physics*. Fapet Oy.
2. Timoshenko, S. (1930). *Strength of Materials*. Van Nostrand.
3. 山岸勇輝 (2026). 『紙飛行機にクリップを付けても、飛ぶ距離は変わらない』[論文590]. Zenodo. 10.5281/zenodo.23014382

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)