緩和曲線の長さを決めている制約は、カントを入れると入れ替わる

— カントを入れると、緩和曲線の長さはジャークからは **47.094262** m で済み、カントを上げる速さから要る **100.000000** m が決める — 分離子は、長さを決めているのが打ち消しきれない横加速度の変わる速さか、カントそのものを上げる速さか — [論文741]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

鉄道の曲線は、直線からいきなり円に入らない。曲がり具合を少しずつ増やす緩和曲線をはさむ。その長さを何が決めているかを、カントの有る場合と無い場合で数える。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、カントが無ければ、長さはジャークが決める——120 km/h で 154.320988 m、130 km/h との比は速さの三乗の 1.271412（第3節）。 第二に、カントは上限で止まる——120 km/h の釣り合いカント 0.151116 m は上限 0.105 m を超え、残る横加速度は 0.423848 m/s²（第2節）。 第三に、これが本稿の芯である。カントを入れると、長さを決める制約が入れ替わる——ジャークからは 47.094262 m で済むが、カントを上げる速さから 100.000000 m が要る（第3節）。 第四に、長さが近くても理由が違う——80 km/h ではカント無し 45.724737 m、カント有り 42.643041 m（第3節）。 第五に、緩和曲線を入れると円がずれる——100 m で終点の向きは 0.062500 rad、円は 0.520761 m 内側へ（第4節）。 第六に、分離子は、長さを決めているのが打ち消しきれない横加速度の変わる速さか、カントそのものを上げる速さかである——「緩和曲線はどれだけ要るか」は、カントを入れるかを言うまで、どの制約の話かが決まらない（第5節）。 キーワード：緩和曲線、カント、ジャーク、横加速度、クロソイド、制約の入れ替わり。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——釣り合いカント、カントで打ち消しきれない横加速度、ジャークとカントの上げ方から緩和曲線の長さを出すこと、曲率が弧長に比例する曲線（クロソイド）と円のずれの近似は、いずれも既知である（エスフェルト 2001、レヴィエン 2008）。設計基準を作らない——軌間、カントの上限、許すジャーク、カントを上げる速さの上限はすべて代表値であり、実際の基準は国と線区で異なる。車両を扱わない——車体の揺れ、台車、ばね、軌道の狂いは扱わず、質点の横加速度だけを見る。カントの上げ方を一つに置く——カントは緩和曲線の中で一様な速さで上げると置く。実在の路線を主張しない——個別の路線や列車は扱わない。道路を扱わない——道路の片勾配と摩擦は論文453 の側である。既刊との関係：論文 453 は、凍った道の片勾配のあるカーブで、ゆっくり走るほうが危ないことがあると示した——その射程注記は「設計基準、緩和曲線、視距は主題ではない」と明記していた。そこではカーブの中に立ったときの力の釣り合いを扱った。ここではカーブへの入り方——釣り合いを何メートルかけて作るか——を扱う。カーブの中の釣り合いと、カーブへの入り方になる。加えたのは、四つの速さで二つの制約から長さを出したこと、決めている制約がカントの有無で入れ替わることを示したこと、80 km/h では長さが近いのに理由が違うことを示したこと、円のずれを数値積分と近似式の両方で出したこと、分離子を「横加速度の変わる速さか、カントを上げる速さか」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：軌間 G、半径 R、速さ v とする。カント C は外側のレールを上げる高さで、横加速度の一部を打ち消す。緩和曲線の中で、打ち消しきれない横加速度 a を許すジャーク J 以下の速さで増やすか、カントを上限 $\dot{C}$ 以下の速さで上げるかで、要る長さが出る。

$$C_{\mathrm{eq}} = \frac{G v^2}{g R}, \qquad a = \frac{v^2}{R} - \frac{g C}{G}, \qquad L_J = \frac{a\,v}{J}, \qquad L_C = \frac{C\,v}{\dot{C}}$$

$G = 1.067$ m、$R = 800$ m、カントの上限 0.105 m、$J = 0.3$ m/s^3、$\dot{C} = 0.035$ m/s と置く。カントが無ければ $a = v^2/R$ である。

問い：緩和曲線の長さは、何が決めているのか。

2. カントは上限で止まる

計算 2.1：四つの速さで、釣り合いカント、実際に入れるカント（上限で止める）、残る横加速度を出した。

速さ	釣り合いカント	入れるカント	残る横加速度
80 km/h	0.067163 m	0.067163 m	0.000000 m/s²
100 km/h	0.104942 m	0.104942 m	0.000000 m/s²
120 km/h	0.151116 m	0.105000 m	0.423848 m/s²
130 km/h	0.177352 m	0.105000 m	0.664975 m/s²

> **観察 2.2**
>
> 100 km/h まではカントで横加速度を打ち消しきれ、120 km/h からは上限で止まって残る。120 km/h ではカントが無ければ 1.388889 m/s²、カントを入れると 0.423848 m/s² である——カントは横加速度を消すが、消せる量には上限がある。

3. 決めている制約が入れ替わる

計算 3.1：同じ四つの速さで、緩和曲線の長さを、カントが無い場合（ジャークから）と、カントが有る場合の二つの制約から出した。

速さ	カント無し（ジャーク）	カント有り（ジャーク）	カント有り（カントの上げ方）
80 km/h	45.724737 m	0.000000 m	42.643041 m
100 km/h	89.306127 m	0.000000 m	83.287190 m
120 km/h	154.320988 m	47.094262 m	100.000000 m
130 km/h	196.205561 m	80.043275 m	108.333333 m

> **観察 3.2**
>
> カントが無ければ、長さはジャークが決め、速さの三乗で伸びる。130 km/h と 120 km/h の比は 1.271412 で、$(130/120)^3$ と一致する——横加速度が速さの二乗、それを増やす時間が速さに反比例するからである。

> **観察 3.3**
>
> これが本稿の芯である。カントを入れると、長さを決める制約が入れ替わる。**120 km/h** で、ジャークからは **47.094262 m** で済むが、カントを **0.105000 m** まで上げるのに **100.000000 m** が要り、そちらが決める——カントは横加速度を消してジャークの制約を緩めるが、カントそのものを上げるという新しい制約を持ち込む。

> **観察 3.4**
>
> 長さが近くても、理由が違う。**80 km/h** ではカント無しで **45.724737 m**、カント有りで **42.643041 m** と近いが、前者はジャーク、後者はカントを上げる速さで決まっており、カント有りのジャークの制約は **0.000000 m** で効いていない——長さの数だけを見ても、どの制約が効いているかは分からない。

4. 緩和曲線を入れると、円がずれる

計算 4.1：曲率が弧長に比例して 0 から $1/R$ に上がる長さ **100 m** の曲線を、シンプソン則で数値積分した。

量	数値積分	閉じた式・近似
終点の向き	**0.062500** rad	$L/(2R) = 0.062500$
円のずれ	**0.520761** m	$L^2/(24R) = 0.520833$

> **観察 4.2**
>
> 緩和曲線を入れると、円を **0.520761 m** 内側へずらさないと直線とつながらない。近似 $L^2/(24R)$ との相対差は 1.395×10^{-4} である——曲線は半径だけでは決まらず、入り口の長さが円の位置まで動かす。

5. 分離子

> **観察 5.1**
>
> 分離子は、長さを決めているのが、打ち消しきれない横加速度の変わる速さ（ジャーク）か、カントそのものを上げる速さかである。カントが無ければ前者、カントを入れれば後者が決める——「緩和曲線はどれだけ要るか」は、カントを入れるかを言うまで、どの制約の話かが決まらない。

> **観察 5.2**
>
> 論文453 と並べる。453 は、片勾配のあるカーブの中に立ったときの力の釣り合いを扱い、緩和曲線は主題ではないと明記した——ここはその入り口で、釣り合いを何メートルかけて作るかを数えた。カーブの中の釣り合いと、カーブへの入り方である。

> **観察 5.3**
>
> 言わないこと。値はすべて代表値で、設計基準も車両の揺れも実在の路線も扱わない——示したのは、長さを決める制約がカントの有無で入れ替わることと、円がずれることである。

6. 点呼と結び

1. 釣り合いカント **0.151116 m**（計算 2.1）：120 km/h で上限を超える。
2. 残る横加速度 **0.423848 m/s²**（計算 2.1）：上限で止めた残り。
3. カント無し **154.320988 m**（計算 3.1）：ジャークが決める。
4. 比 **1.271412**（観察 3.2）：速さの三乗。
5. ジャークから **47.094262 m**（計算 3.1）：カントで緩む。
6. カントの上げ方から **100.000000 m**（計算 3.1）：本稿の芯。
7. **45.724737 m** と **42.643041 m**（観察 3.4）：近いのに理由が違う。
8. 終点の向き 0.062500 rad（計算 4.1）：$L/(2R)$。
9. 円のずれ **0.520761 m**（計算 4.1）：入り口が円を動かす。
10. 横加速度の変わる速さか、カントを上げる速さか（観察 5.1）：分離子・論文453。

結び：緩和曲線の長さを決めている制約は、カントを入れると入れ替わる。軌間 1.067 m・半径 800 m で、カントが無ければ長さはジャークが決め、120 km/h で 154.320988 m、130 km/h との比は速さの三乗の 1.271412 になる——横加速度が速さの二乗で効くからである。カントを入れると、120 km/h の釣り合いカント 0.151116 m は上限 0.105 m で止まり、残る横加速度は 0.423848 m/s^2 に減る。ジャークからは 47.094262 m で済むが、カントを上げる速さから 100.000000 m が要り、そちらが決める——カントはジャークの制約を緩めるが、カントを上げるという新しい制約を持ち込む。80 km/h では 45.724737 m と 42.643041 m で長さは近いのに、決めている制約が違う。緩和曲線を 100 m 入れると円は 0.520761 m 内側へずれ、曲線は半径だけでは決まらない。分離子は、長さを決めているのが打ち消しきれない横加速度の変わる速さか、カントそのものを上げる速さかである。既刊との位置——論文453 はカーブの中の釣り合いを扱い、緩和曲線は主題ではないと明記した。ここはカーブへの入り方を数えた。正直に言えば——値はすべて代表値で、設計基準も車両も実在の路線も扱わず、カントは一様な速さで上げると置いた。

参考文献

1. Esveld, C. (2001). *Modern Railway Track* (2nd ed.). MRT-Productions.
2. Levien, R. (2008). The Euler spiral: A mathematical history. *Technical Report, University of California, Berkeley*.
3. 山岸勇輝 (2026).『凍った道でゆっくり走ると、速く走るより危ないことがある』[論文453]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22732924

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)