アムダールとグスタフソンの食い違いは、逐次の割合を一台で測るか並列で測るかの違いである

— 一台で測った逐次 **0.01** をアムダールとグスタフソンに入れると **10000** 台で **99.980201** 倍食い違うが、同じ実行を並列の側で測った割合を入れれば二つは同じ値を返す — 分離子は、固定しているのが問題の大きさか、かかる時間か — [論文760]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

並列化の限界は、アムダールの法則では厳しく、グスタフソンの法則では甘く見える。二つは対立する法則だと言われることがある。二つが入れている「逐次の割合」を、どの実行で測った数かで分けて数える。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、同じ数を入れると、大きく食い違う——逐次 0.01 で 10000 台なら、アムダール 99.019705 倍、グスタフソン 9900.010000 倍——99.980201 倍（第2節）。 第二に、一台で 0.01 の逐次は、並列の実行では大半を占める——100 台で 0.502513、10000 台で 0.990197（第3節）。 第三に、これが本稿の芯である。並列の実行で測った割合を入れると、二つの法則は一致する——グスタフソンが返すのは 50.251256・99.019705 で、アムダールと同じ（第3節）。 第四に、一致は割合を変えても崩れない——並列の割合 0.99 と 0.90、台数 10 から 10000 の 8 通りすべて（第3節）。 第五に、その割合は論文705 の外れの割合と同じ式の値である——100 台の 0.502513 は、当たり率 0.99・外れ 100 倍で外れが使う時間の割合と同じ（第4節）。 第六に、分離子は、固定しているのが問題の大きさか、かかる時間かである——「限界は 100 倍か 9900 倍か」は、割合をどの実行で測ったかを言うまで答が無い（第5節）。 キーワード：並列化の限界、アムダールの法則、グスタフソンの法則、逐次の割合、問題の大きさと時間の固定、測る実行。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——アムダールの法則、グスタフソンの法則、二つが逐次の割合の測り方の違いで互いに書き換えられることは、いずれも既知である（アムダール 1967、グスタフソン 1988）。仕事を二つに分ける——逐次の部分と並列の部分だけを置き、通信、同期、記憶の奪い合い、負荷の偏りは入れない。どちらが正しいとも言わない——二つは固定するものが違うだけで、どちらの問いを立てるかは使う人が決める。実在の機械を主張しない——個別の計算機や仕事の割合は扱わない。0.99 と 0.90 は比べるための値である。既刊との関係：論文705 は、当たり率 0.99 でも時間の半分以上を外れが使うことを示した——その射程注記は「アムダールの法則そのものの導出や、並列化の限界は扱わない。同じ形であることを述べるにとどめる」と明記していた。ここはその形そのものを扱い、100 台での逐次の割合が 705 の外れの割合と同じ式の値になることを示す。論文702 も引く——そこでは分ける側とまとめる側の指数が競い、並列化の効きは入れなかった。ここでは分けられない側の割合を、どの実行で測るかが答を決める。加えたのは、同じ逐次 0.01 を二つの法則に入れた食い違いを 99.980201 倍と出したこと、並列の実行での逐次の割合を台数ごとに出したこと、それを入れると 8 通りすべてで二つが一致することを確かめたこと、分離子を「固定するのが問題の大きさか、時間か」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：一台での実行時間のうち並列にできる割合を p、台数を n とする。アムダールは問題の大きさを固定した速さの比を、グスタフソンは時間を固定したときに片づく仕事の比を与える。グスタフソンの逐次の割合 α は、並列の実行の時間の中で逐次が占める割合である。

$$S_A = \frac{1}{(1-p) + p/n}, \qquad S_G = \alpha + (1-\alpha)\,n, \qquad \alpha = \frac{1-p}{(1-p) + p/n}$$

この α を S_G に入れると、分子は $(1-p)+p=1$ になり、$S_G = S_A$ である。

問い：並列化の限界は、アムダールの厳しい数か、グスタフソンの甘い数か。

2. 同じ数を入れると、大きく食い違う

計算 2.1：一台で測った逐次 0.01（$p = 0.99$）を、二つの法則にそのまま入れた。

台数	アムダール	グスタフソン（逐次 0.01）
10	9.174312	9.910000
100	50.251256	99.010000
1000	90.991811	990.010000
10000	99.019705	9900.010000

> **観察 2.2**
>
> 同じ数を入れると、10000 台で 99.980201 倍食い違う。アムダールは上限 100.000000 に張り付き、グスタフソンは台数にほぼ比例して伸びる——二つが対立する法則に見えるのは、ここである。

3. 並列の実行で測れば、二つは一致する

計算 3.1：同じ実行を並列の側で測った逐次の割合 α と、それを入れたグスタフソンを出した。

台数	並列の実行での逐次の割合	それを入れたグスタフソン	アムダール
10	0.091743	9.174312	9.174312
100	0.502513	50.251256	50.251256
1000	0.909918	90.991811	90.991811
10000	0.990197	99.019705	99.019705

> **観察 3.2**
>
> 一台で 0.01 の逐次は、並列の実行では大半を占める。100 台で 0.502513、10000 台で 0.990197 である——並列の部分が縮むので、残った逐次の部分が時間の大半になる。

観察 3.3

これが本稿の芯である。並列の実行で測った割合を入れると、グスタフソンはアムダールと同じ数を返す。並列の割合 0.90 でも、10 台 5.263158、100 台 9.174312、1000 台 9.910803、10000 台 9.991008 で、8 通りすべて一致した——二つは対立する法則ではなく、同じ実行を二つの物差しで測った言い方である。

4. 論文705 と同じ式の値

観察 4.1

100 台での逐次の割合 0.502513 は、論文705 の外れの割合と同じ数である。705 は当たり率 0.99・外れ 100 倍で、外れが時間の 0.502513 を使うことを示した。ここは逐次 0.01 に 100 台の比を掛けた重みで、どちらも $1/(1+0.99)$ である——705 が「同じ形」と述べた、その形の同じ点である。

観察 4.2

並列の割合 0.90 の 100 台での 0.917431 も、705 の当たり率 0.90 の外れの割合と同じ値である。小さな重みに大きな比が掛かると、時間の大半がそちらに移る——キャッシュでも並列でも、同じ一つの式が時間の配分を決めている。

5. 分離子

観察 5.1

分離子は、固定しているのが問題の大きさか、かかる時間か——それが、どちらの実行で割合を測るかを決める。問題を固定すれば一台の実行の割合 0.01 が自然で、限界は 100 倍、時間を固定すれば並列の実行の割合が自然で、同じ実行では 0.990197 になる——「限界は 100 倍か 9900 倍か」は、割合をどの実行で測ったかを言うまで答が無い。

> **観察 5.2**
>
> 論文702 と並べる。702 は、分ける側とまとめる側の指数が速さを決め、並列化の効きは入れないと明記した——ここでは分けられない側の割合が限界を決め、その割合の測り方が答を入れ替える。

> **観察 5.3**
>
> 言わないこと。通信も同期も記憶の奪い合いも入れず、どちらの法則が正しいとも言わない——示したのは、二つの食い違いが割合を測る実行の違いであることである。

6. 点呼と結び

1. アムダール **99.019705** 倍（計算 2.1）：10000 台。
2. グスタフソン **9900.010000** 倍（計算 2.1）：同じ 0.01 を入れて。
3. **99.980201** 倍の食い違い（観察 2.2）：対立に見える。
4. 100 台で **0.502513**（計算 3.1）：並列の実行での逐次。
5. 10000 台で **0.990197**（計算 3.1）：大半を占める。
6. それを入れて **50.251256**（計算 3.1）：アムダールと同じ。
7. 8 通りすべて一致（観察 3.3）：本稿の芯。
8. 割合 0.90 の 10000 台で **9.991008**（観察 3.3）：一致の一つ。
9. **0.917431**（観察 4.2）：論文705 と同じ式の値。
10. 問題の大きさか、時間か（観察 5.1）：分離子・論文705・702。

結び：アムダールとグスタフソンの食い違いは、逐次の割合を一台で測るか並列で測るかの違いである。一台で測った逐次 0.01 を二つの法則にそのまま入れると、10000 台でアムダール 99.019705 倍、グスタフソン 9900.010000 倍で、99.980201 倍食い違う——二つが対立する法則に見えるのは、同じ数を入れたからである。同じ実行を並列の側で測ると、逐次が占める割合は 100 台で 0.502513、10000 台で 0.990197 で、それを入れたグスタフソンは 50.251256・99.019705 とアムダールに一致し、並列の割合 0.90 を含む 8 通りすべてで一致した——二つは同じ実行を二つの物差しで測った言い方である。100 台での 0.502513 は、論文705 の当たり率 0.99 で外れが使う時間の割合と同じ式の値である。分離子は、固定しているのが問題の大きさか、かかる時間かである——「限界は 100 倍か 9900 倍か」は、割合をどの実行で測ったかを言うまで答が無い。既刊との位置——論文705 は同じ形だと述べるにとどめ、ここはその形を扱った。論文702 は並列化の効きを入れなかった。正直に言えば——通信も同期も入れず、どちらの法則が正しいとも言っていない。

参考文献

1. Amdahl, G. M. (1967). Validity of the single processor approach to achieving large scale computing capabilities. *AFIPS Conference Proceedings*.
2. Gustafson, J. L. (1988). Reevaluating Amdahl’s law. *Communications of the ACM*.
3. 山岸勇輝 (2026).『分けても速くならない場合がある——決めているのは、分け方ではなく、まとめる仕事である』[論文702]. Zenodo. 10.5281/zenodo.23014909
4. 山岸勇輝 (2026).『当たり率 **0.99** でも、時間の半分以上は外れが使っている』[論文705]. Zenodo. 10.5281/zenodo.23014923

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)