後ろから数える言語は状態が指数で要り、前から数える言語は一次で足りる

— 「後ろから n 番目が 1」を読む非決定性の機械は $n+1$ 状態だが、部分集合構成で決定的にすると届く状態はちょうど 2^n で、最小化しても減らない（$n=1$〜10） — 分離子は、機械が先を見ずに一つに決めて読むか、当て推量で分かれて読んでよいか — [論文765]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

正規表現で書ける言語は、有限の記憶の機械で読める。けれど、その記憶がいくつ要るかは、同じ長さの表現でも大きく違う。後ろから数える言語と前から数える言語で、機械の状態の数を数える。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、非決定性の機械なら、どちらも一次で足りる——「後ろから n 番目が 1」は $n+1$ 状態（第2節）。 第二に、後ろから数える言語を決定的にすると、状態はちょうど 2^n になる——部分集合構成で届く状態を $n=1$ から 12 まで数えて、すべて 2^n（第2節）。 第三に、最小化しても減らない——$n=1$ から 10 まで、最小の決定的な機械も 2^n 状態（第2節）。 第四に、これが本稿の芯である。前から数える言語なら、決定的でも一次で足りる——最小 $n+2$ 状態で、$n=10$ では 1024 対 12、**85.333333** 倍（第3節）。 第五に、二つの機械は言語どおりに読む——$n=3$ で長さ 12 までの 8191 語すべてで確かめた（第3節）。 第六に、分離子は、機械が先を見ずに一つに決めて読むか、当て推量で分かれて読んでよいかである——「正規表現は有限の記憶で読める」は、数える向きと決定性を言うまで、その記憶がいくつかが決まらない（第4節）。 キーワード：正規表現、有限オートマトン、部分集合構成、非決定性、状態の爆発、数える向き。

> 本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——非決定性の有限オートマトンを部分集合構成で決定的にすること、その状態が指数で増えうること、「後ろから n 番目」の言語が指数の状態を要する標準の例であること、状態の最小化は、いずれも既知である（ラビン＆スコット 1959、ホップクロフトほか 2006）。実装を扱わない——正規表現の照合の実装、後戻り、速さは扱わない。文字を二つに限る——0 と 1 の二文字の言語だけを見る。上界を証明しない——一般の状態の爆発の上界は引くだけで、この一族の状態を実際に数えるにとどめる。最小化の範囲を限る——最小化は $n = 10$ まで、到達状態の数え上げは $n = 12$ まで行った。既刊との関係：論文296 は、言語の階層を決めているのが記憶の量ではなく型であることを示した——その射程注記は、一つの鳩の巣論法と三つの手間の比較だけを使い、マイヒル＝ネロードの定理は引くだけと明記していた。そこでは型の違いが階層を決めた。ここでは型が同じ正規言語の中で、記憶の量が 2^n と $n+2$ に分かれ、それを分けているのが数える向きと決定性であることを数える。型の違いと、同じ型の中の量の違いになる。加えたのは、部分集合構成で届く状態を $n = 12$ まで数えて 2^n に一致させたこと、最小化しても減らないことを $n = 10$ まで確かめたこと、前から数える言語の最小が $n+2$ であることを並べ、$n = 10$ で 85.333333 倍の差を出したこと、総当たりで二つの機械の言語を確かめたこと、分離子を「一つに決めて読むか、分かれて読んでよいか」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：文字 0 と 1 の語について、二つの言語を正規表現で書く。長さはどちらも同じ程度である。

$$L_{\text{後}}(n) = (0 \mid 1)^{*}\, 1\, (0 \mid 1)^{n-1}, \qquad L_{\text{前}}(n) = (0 \mid 1)^{n-1}\, 1\, (0 \mid 1)^{*}$$

$L_{\text{後}}(n)$ は「後ろから n 番目が 1」、$L_{\text{前}}(n)$ は「前から n 番目が 1」の語の集まりである。非決定性の機械は読みながら当て推量で分かれてよく、決定的な機械は一文字ごとに一つの状態に決める。

問い：同じ長さの正規表現なら、読む機械の記憶も同じくらいで足りるのか。

2. 後ろから数えると、状態は 2^n

計算 2.1：$L_{\text{後}}(n)$ の非決定性の機械（$n+1$ 状態）を部分集合構成で決定的にし、届く状態を数え、さらに最小化した。

n	非決定性の状態	部分集合構成で届く状態	最小の決定的な機械
1	2	2	2
3	4	8	8
5	6	32	32
8	9	256	256
10	11	1024	1024
12	13	4096	——

> **観察 2.2**
>
> 後ろから数える言語を決定的にすると、届く状態はちょうど 2^n になる。$n = 1$ から 12 まですべて一致した——決定的な機械は、最後の n 文字の並びをすべて覚えておかなければならない。

> **観察 2.3**
>
> 最小化しても減らない。$n = 1$ から 10 まで、最小の決定的な機械も 2^n 状態である——部分集合構成の作り方の無駄ではなく、この言語そのものが要る記憶である。

3. 前から数えると、一次で足りる

計算 3.1：$L_{\text{前}}(n)$ の決定的な機械を作って最小化し、$n = 3$ で長さ 12 までの語をすべて二つの機械に読ませた。

n	後ろから（最小）	前から（最小）
1	2	3
3	8	5
5	32	7
10	1024	12

観察 3.2

これが本稿の芯である。前から数える言語なら、決定的な機械でも一次で足りる。最小は $n+2$ 状態（$n=1$ から 12）で、$n=10$ では後ろから数える 1024 状態に対し 12 状態、85.333333 倍の差になる——前から数えるなら、n 番目を読んだ瞬間に答が決まり、あとは覚えなくてよい。

観察 3.3

二つの機械は、言語どおりに読んでいる。$n=3$ で長さ 0 から 12 までの 8191 語すべてについて、受理と言語の定義が一致した——状態の数の差は、機械の作り違いではない。

4. 分離子

観察 4.1

分離子は、機械が先を見ずに一つに決めて読むか、当て推量で分かれて読んでよいかである。分かれてよければ後ろから数えても $n+1$ 状態で足り、一つに決めるなら 2^n 状態が要る。前から数える言語ではこの差が生じない——「正規表現は有限の記憶で読める」は、数える向きと決定性を言うまで、その記憶がいくつかが決まらない。

観察 4.2

論文296 と並べる。296 は、言語の階層を決めているのは記憶の量ではなく型であることを示した——ここでは型が同じ正規言語の中で、記憶の量が 2^n と $n+2$ に分かれる。型が階層を決めても、同じ型の中の量は読み方で指数まで動く。

観察 4.3

言わないこと。実装も速さも、三文字以上の言語も、一般の上界の証明も扱わない——示したのは、この一族で状態が指数と一次に分かれることを数えたことだけである。

5. 点呼と結び

1. 非決定性 $n+1$ 状態（計算 2.1）：後ろから数えても一次。
2. 届く状態 2^n（観察 2.2）：$n=1$ から 12。
3. $n=12$ で 4096（計算 2.1）：数え上げの端。
4. 最小も 2^n（観察 2.3）：言語そのものの記憶。
5. $n=10$ で 1024（計算 2.1）：決定的に後ろから。
6. 前から $n+2$（観察 3.2）：本稿の芯。
7. $n=10$ で 12（計算 3.1）：決定的に前から。
8. 85.333333 倍（観察 3.2）：向きの差。
9. 8191 語で一致（観察 3.3）：作り違いではない。
10. 一つに決めるか、分かれてよいか（観察 4.1）：分離子・論文296。

結び：後ろから数える言語は状態が指数で要り、前から数える言語は一次で足りる。「後ろから n 番目が 1」を読む非決定性の機械は $n+1$ 状態だが、決定的にすると届く状態はちょうど 2^n で（$n=1$ から 12）、最小化しても減らない（$n=1$ から 10）——決定的な機械は最後の n 文字の並びをすべて覚えておかなければならない。ところが「前から n 番目が 1」なら決定的な機械でも最小 $n+2$ 状態で、$n=10$ では 1024 対 12、85.333333 倍の差になる——前から数えるなら、n 番目を読んだ瞬間に答が決まる。$n=3$ では長さ 12 までの 8191 語すべてで、二つの機械が言語どおりに受理した。分離子は、機械が先を見ずに一つに決めて読むか、当て推量で分かれて読んでよいかである——「正規表現は有限の記憶で読める」は、数える向きと決定性を言うまで、その記憶がいくつかが決まらない。既刊との位置——論文296 は型が階層を決めることを示した。ここは同じ型の中で、記憶の量が読み方で指数まで動くことを数えた。正直に言えば——実装も速さも一般の上界の証明も扱わず、この一族の状態を数えただけである。

参考文献

1. Hopcroft, J. E., Motwani, R., & Ullman, J. D. (2006). *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation* (3rd ed.). Addison-Wesley.
2. Rabin, M. O., & Scott, D. (1959). Finite automata and their decision problems. *IBM Journal of Research and Development*.
3. 山岸勇輝 (2026).『言語の階層を決めているのは、記憶の量ではなく型である』[論文296]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171705

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)