和の誤差を消すのは足す順序ではなく、丸めで捨てた端数を次に持ち越すことである

— 1.0 に 10^{-9} を 10^{6} 回足すと、そのまま足した誤差 8.274037×10^{-11} は丸めの端数の積み重ねと一致し、カハン加算は正確に丸めた和と同じになる — 分離子は、丸めの誤差が毎回同じ向きに出るか — [論文766]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

浮動小数点で小さな数を何度も足すと、誤差がたまる。小さい順に足せば良いと言われる。足す順序を変えることと、丸めで捨てた端数を覚えておくことを、正確な和と比べて数える。新しい定理も法則も主張しない。第一に、そのまま足すと、誤差が積もる——1.0 に 10^{-9} を 10^{6} 回で 8.274037×10^{-11}、1.0 の刻みの 372629.503720 倍（第2節）。第二に、その誤差は、毎回同じ向きの丸めの積み上げである——一回ごとに 8.274037×10^{-17} だけ余分に足され、10^{6} 回分と相対差 0.000000（第3節）。第三に、小さいほうから足すと、誤差は減る——8.105454×10^{-15} まで（第2節）。第四に、これが本稿の芯である。捨てた端数を覚えて返すと、正確に丸めた和まで戻る——カハン加算の誤差 $-1.101964 \times 10^{-16}$ は、正確に丸めた和と同じ（第2節）。第五に、小さな例でも同じ——0.1 を 10 回足すと、そのままでは 0.9999999999999999、カハン加算では 1.0（第2節）。第六に、分離子は、丸めの誤差が毎回同じ向きに出るかである——同じ向きなら回数に比例して積もり、覚えて返せば一回分に収まる（第4節）。 キーワード：カハン加算、丸め誤差、浮動小数点、補償付き総和、足す順序、端数の持ち越し。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——浮動小数点の丸め、足す順序で誤差が変わること、丸めで捨てた量を覚えて足し戻す補償付き総和（カハン加算）、正確に丸めた和を返す方法は、いずれも既知である（カハン 1965、ハイアム 2002）。倍精度だけを見る——他の精度、区間演算、多倍長の演算は扱わない。並べ方を扱わない——並列の和やベクトル化で足す順序が変わる場合は扱わない。上界を証明しない——カハン加算の誤差の一般の上界は引くだけで、この和の誤差を実際に測る。正確な和は分数で持つ——誤差は、10^{-9} の倍精度の値を分数に直して足した正確な和からの差として測った。既刊との関係：論文368 は、代数的に等しい二つの式が、返す有効桁を 15 桁変えることを示した——その射程注記は「倍精度以外の演算や補償付き総和は主題ではない」と明記していた。そこでは式を書き換えて、引き算で失う桁を取り戻した。ここでは式も順序も変えず、丸めで捨てた端数を覚えて次に返すことで、積もった誤差を正確に丸めた和まで戻す。式を書き換えるか、捨てたものを覚えておくかになる。加えたのは、四つの足し方の誤差を正確な和と比べて並べたこと、そのまま足した誤差が一回ごとの丸めの積み上げと相対差 **0.000000** で一致することを示したこと、カハン加算が正確に丸めた和と同じ誤差に戻ることを示したこと、分離子を「丸めの誤差が同じ向きに出るか」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：倍精度で s に x を足すと、結果は最も近い表せる数に丸められる。カハン加算は、丸めで捨てた量 c を毎回計算して、次の足し算で返す。

$$y = x - c, \qquad t = s + y, \qquad c = (t - s) - y, \qquad s = t$$

1 と 2 のあいだの刻みは 2^{-52} で、10^{-9} はその整数倍ではないので、足すたびに同じだけ丸められる。1.0 に 10^{-9} を 10^{6} 回足し、正確な和を分数で持って誤差を測る。

問い：和の誤差を減らすのは、足す順序なのか。

2. 四つの足し方の誤差

計算 2.1：1.0 に 10^{-9} を 10^{6} 回足す和を、四つの方法で出し、正確な和からの誤差を測った。

足し方	正確な和からの誤差
そのまま足す	8.274037×10^{-11}
小さいほうから足す	8.105454×10^{-15}
カハン加算	$-1.101964 \times 10^{-16}$
正確に丸めた和	$-1.101964 \times 10^{-16}$

観察 2.2

そのまま足すと、誤差は 1.0 の刻み 2.220446×10^{-16} の 372629.503720 倍まで積もる。小さいほうから足すと 8.105454×10^{-15} まで減るが、刻みの数十倍が残る——順序を変えると減るが、それだけでは正確に丸めた和には届かない。

観察 2.3

これが本稿の芯である。捨てた端数を覚えて返すと、正確に丸めた和まで戻る。カハン加算の誤差 $-1.101964 \times 10^{-16}$ は、正確に丸めた和の誤差と同じで、正確な和に最も近い倍精度との差は 0 である——順序を変えずに、覚えておくだけで戻る。

観察 2.4

小さな例でも同じことが起きる。0.1 を 10 回足すと、そのままでは 0.9999999999999999、カハン加算と正確に丸めた和では 1.0 になる——端数を持ち越すと、見慣れた答えに戻る。

3. 誤差は、同じ向きに積もっていた

計算 3.1：1 と 2 のあいだで 10^{-9} を足したとき、実際に足される量と足すべき量の差を分数で正確に出した。

量	値
一回ごとに余分に足される量	8.274037×10^{-17}
その 10^6 回分	8.274037×10^{-11}
そのまま足した誤差との相対差	0.000000

> **観察 3.2**
>
> そのまま足した誤差は、偶然のばらつきではなく、毎回同じ向きの丸めの積み上げである。一回ごとの 8.274037×10^{-17} の 10^6 回分が、誤差 8.274037×10^{-11} と相対差 0.000000 で一致した——同じ向きに積もるので、回数に比例して大きくなる。

> **観察 3.3**
>
> だから覚えて返すことが効く。カハン加算は毎回の 8.274037×10^{-17} を c に取り分けて次に返すので、積もる前に打ち消される——誤差が同じ向きであることが、覚える方法の効きの源である。

4. 分離子

> **観察 4.1**
>
> 分離子は、丸めの誤差が毎回同じ向きに出るかである。同じ向きなら回数に比例して 8.274037×10^{-11} まで積もり、覚えて返せば一回分の $-1.101964 \times 10^{-16}$ に収まる——「足す順序を工夫すれば精度が上がる」は、誤差が同じ向きに積もっているかを言うまで、どこまで戻るかが決まらない。

> **観察 4.2**
>
> 論文368 と並べる。368 は、同じ値の式を書き換えることで、引き算で失う桁を取り戻した——ここでは式も順序も変えず、捨てたものを覚えておくことで取り戻す。式を書き換えるか、捨てたものを覚えておくかである。

> **観察 4.3**
>
> 言わないこと。倍精度以外の演算も、並列の和も、カハン加算の一般の上界も扱わない——示したのは、積もった誤差の正体と、それを覚えて返すと戻ることである。

5. 点呼と結び

1. そのまま $\mathbf{8.274037 \times 10^{-11}}$（計算 2.1）：積もる。
2. 刻みの $\mathbf{372629.503720}$ 倍（観察 2.2）：大きさ。
3. 小さいほうから $\mathbf{8.105454 \times 10^{-15}}$（計算 2.1）：減るが届かない。
4. カハン $\mathbf{-1.101964 \times 10^{-16}}$（計算 2.1）：本稿の芯。
5. 正確に丸めた和と差 $\mathbf{0}$（観察 2.3）：戻り切る。
6. 一回ごと $\mathbf{8.274037 \times 10^{-17}}$（計算 3.1）：同じ向きの丸め。
7. 相対差 $\mathbf{0.000000}$（観察 3.2）：積み上げが誤差そのもの。
8. $\mathbf{0.1}$ を 10 回で $\mathbf{0.9999999999999999}$（観察 2.4）：小さな例。
9. カハンなら $\mathbf{1.0}$（観察 2.4）：持ち越すと戻る。
10. 同じ向きに出るか（観察 4.1）：分離子・論文368。

結び：和の誤差を消すのは足す順序ではなく、丸めで捨てた端数を次に持ち越すことである。1.0 に 10^{-9} を 10^{6} 回足すと、そのまま足した誤差は 8.274037×10^{-11} で、1.0 の刻みの 372629.503720 倍になる——それは一回ごとに同じ向きに余分に足される 8.274037×10^{-17} の 10^{6} 回分と相対差 0.000000 で一致し、偶然ではなく積み上げである。小さいほうから足すと 8.105454×10^{-15} まで減るが、捨てた端数を覚えて返すカハン加算は $-1.101964 \times 10^{-16}$ で、正確に丸めた和と同じまで戻る——順序を変えるより、覚えておくほうが効く。0.1 を 10 回足しても、そのままでは 0.9999999999999999、カハン加算では 1.0 になる。分離子は、丸めの誤差が毎回同じ向きに出るかである——同じ向きなら回数に比例して積もり、覚えて返せば一回分に収まる。既刊との位置——論文368 は式を書き換えて桁を取り戻し、補償付き総和は主題ではないと明記した。ここは捨てたものを覚えて取り戻すことを数えた。正直に言えば——倍精度以外も並列の和も一般の上界も扱っていない。

参考文献

1. Higham, N. J. (2002). *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms* (2nd ed.). SIAM.
2. Kahan, W. (1965). Further remarks on reducing truncation errors. *Communications of the ACM*.
3. 山岸勇輝 (2026).『代数的に等しい二つの式が、返す有効桁を **15** 桁変える』[論文368]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22697726

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)