素数の間隔の平均は ln x で当たるが、最大の間隔はその平均からどんどん離れていく

— 100 万までふるいで数えると、平均の間隔 $x/\pi(x)$ と $\ln x$ の比は $x = 10^3$ の 0.861695 から 10^6 の 0.922092 へ 1 に近づく — 分離子は、数えているのが間隔の平均か、いちばん長い間隔か — [論文769]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— *From thinking to syncing.* —

要旨

素数定理は、x のあたりで素数がおよそ $\ln x$ おきに現れると言う。それは平均の話である。平均の間隔と、いちばん長い間隔を、範囲を広げながら並べて数える。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、平均の間隔は $\ln x$ に近づく——比は 10^3 で **0.861695**、10^6 で **0.922092**（第2節）。 第二に、最大の間隔は $\ln p$ から離れていく——比は **2.946443**・**3.928244**・**6.953520**・**8.697998**（第2節）。 第三に、これが本稿の芯である。平均が当たるほど、最大は平均から遠くなる——100 万まで、平均は $\ln x$ の 0.922092 倍、最大は $\ln p$ の 8.697998 倍（第2節）。 第四に、最大の間隔は飛び飛びに更新される——52・72・86・96・112・114（第3節）。 第五に、素数の無い並びは、いくらでも長く作れる——$10!+2$ から $10!+10$、$12!+2$ から $12!+12$ はすべて合成数（第3節）。 第六に、分離子は、数えているのが間隔の平均か、いちばん長い間隔かである——平均は素数定理が決め、最大は決めない（第4節）。 キーワード：素数の間隔、素数定理、最大の間隔、平均と極値、素数の無い並び、エラトステネスのふるい。

> 本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——素数定理、エラトステネスのふるい、階乗の後ろに任意に長い合成数の並びがあること、最大の間隔の増え方についての予想は、いずれも既知である（ハーディ & ライト 2008、クラメール 1936）。範囲を限る——100 万までをふるいで数えた。それより先の最大の間隔は主張しない。予想を扱わない——最大の間隔が $(\ln p)^2$ の程度で増えるという予想は名前を挙げるにとどめる。証明しない——素数定理は引くだけで、証明には立ち入らない。合成数の並びは試し割りで確かめる——$10!$ と $12!$ の後ろを一つずつ割って確かめた。既刊との関係：論文344 は、強度が材料の定数ではなく、体積の関数であることを示した——そこではいちばん弱い欠陥が強度を決め、体積が大きいほど弱くなった。ここでは素数の平均の間隔は $\ln x$ に乗るのに、いちばん長い間隔は範囲が広いほど平均から離れる。平均で決まらない極値が、範囲とともに動く。加えたのは、四つの範囲で平均の間隔と最大の間隔を並べたこと、平均の比が 0.922092 へ近づくのに最大の比が 8.697998 へ開くことを示したこと、最大の間隔の更新を並べたこと、階乗の後ろの合成数の並びを確かめたこと、分離子を「平均か、いちばん長いか」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：x 以下の素数の個数を $\pi(x)$ とする。平均の間隔は $x/\pi(x)$ で、素数定理はそれが $\ln x$ に近づくと言う。最大の間隔は、x 以下の隣り合う素数の差の最大である。$n!+2$ から $n!+n$ は、k が $n!+k$ を割るので合成数である。

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}, \qquad \bar{g}(x) = \frac{x}{\pi(x)}, \qquad k \mid n!+k \quad (2 \le k \le n)$$

100 万までをエラトステネスのふるいで数える。

問い：素数がおよそ $\ln x$ おきに現れるなら、いちばん長い空白もおよそ $\ln x$ なのか。

2. 平均は当たり、最大は離れる

計算 2.1：四つの範囲で、素数の個数、平均の間隔、$\ln x$、最大の間隔を出した。

x	素数	平均の間隔	平均／$\ln x$	最大の間隔	最大／$\ln p$
10^3	168	5.952381	0.861695	20	2.946443
10^4	1229	8.136697	0.883431	36	3.928244
10^5	9592	10.425354	0.905535	72	6.953520
10^6	78498	12.739178	0.922092	114	8.697998

観察 2.2

平均の間隔は $\ln x$ に近づく。比は 0.861695 から 0.922092 へ上がり、$\pi(10^6) = 78498$ は既知の値と一致した——素数定理の言うとおりである。

観察 2.3

これが本稿の芯である。平均が当たるほど、最大は平均から遠くなる。最大の間隔と $\ln p$ の比は 2.946443 から 8.697998 へ開き、100 万までの最大は 492113 の後の 114 である——平均の法則は、いちばん長い空白を押さえない。

3. 更新と、作れる空白

計算 3.1：100 万までで最大の間隔が更新された点を並べ、$10!$ と $12!$ の後ろの並びを試し割りで確かめた。

最大の間隔	その直前の素数
52	19609
72	31397
86	155921
96	360653
112	370261
114	492113

観察 3.2

最大の間隔は、なめらかにではなく飛び飛びに更新される。96 から 112 への更新は 360653 と 370261 の近くで起き、そのあとしばらく止まる——いちばん長い空白は、平均のように滑らかな曲線を描かない。

観察 3.3

素数の無い並びは、いくらでも長く作れる。$10!+2$ から $10!+10$ の 9 個、$12!+2$ から $12!+12$ の 11 個は、試し割りですべて合成数だった——空白の長さに上限を置く法則は無い。

4. 分離子

観察 4.1

分離子は、数えているのが間隔の平均か、いちばん長い間隔かである。平均は素数定理が決め、比は 0.922092 まで 1 に近づく。最大は素数定理が決めず、比は 8.697998 まで開く——「素数は $\ln x$ おきに現れる」は、平均の話か最悪の話かを言うまで、どこまで当たるかが決まらない。

観察 4.2

論文344 と並べる。344 は、いちばん弱い欠陥が強度を決め、体積が大きいほど弱くなることを示した——ここでも、平均では決まらない極値が、範囲が広いほど平均から離れる。

観察 4.3

言わないこと。100 万より先の最大の間隔も、最大の増え方の予想も、素数定理の証明も扱わない——示したのは、平均と最大が別の法則に従って見えることである。

5. 点呼と結び

1. $\pi(10^6) = 78498$（計算 2.1）：既知の値。
2. 平均の比 0.861695（計算 2.1）：10^3。
3. 平均の比 0.922092（観察 2.2）：1 に近づく。
4. 最大の比 2.946443（計算 2.1）：10^3。
5. 最大の比 8.697998（観察 2.3）：本稿の芯。
6. 最大の間隔 114（計算 2.1）：492113 の後。
7. 平均の間隔 12.739178（計算 2.1）：10^6。

8. 更新 **96** から **112**（観察 3.2）：飛び飛び。
9. **12!＋2** から **12!＋12**（観察 3.3）：作れる空白。
10. 平均か、いちばん長いか（観察 4.1）：分離子・論文344。

結び：素数の間隔の平均は $\ln x$ で当たるが、最大の間隔はその平均からどんどん離れていく。100 万までふるいで数えると、平均の間隔と $\ln x$ の比は 10^3 の 0.861695 から 10^6 の 0.922092 へ 1 に近づき、素数定理の言うとおりである——ところが最大の間隔と $\ln p$ の比は 2.946443・3.928244・6.953520・8.697998 と開いていく。100 万までの最大の間隔は 492113 の後の 114 で、更新は 52 から 114 まで飛び飛びに起き、10!＋2 から 10!＋10 や 12!＋2 から 12!＋12 のような素数の無い並びはいくらでも長く作れる——平均の法則は、いちばん長い空白を押さえない。分離子は、数えているのが間隔の平均か、いちばん長い間隔かである——平均は素数定理が決め、最大は決めない。既刊との位置——論文344 はいちばん弱い欠陥が体積とともに強度を下げることを示した。ここは素数の並びで、極値が範囲とともに平均から離れることを数えた。正直に言えば——100 万までの計算で、それより先も予想も証明も扱っていない。

参考文献

1. Cramér, H. (1936). On the order of magnitude of the difference between consecutive prime numbers. *Acta Arithmetica*.
2. Hardy, G. H., & Wright, E. M. (2008). *An Introduction to the Theory of Numbers* (6th ed.). Oxford University Press.
3. 山岸勇輝 (2026). 『強度は材料の定数ではなく、体積の関数である』[論文344]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22682232

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)