

リューヴィルの定理と時間の矢：微視の保存と粗視の増大 — ハミルトン・ヒンジ（論文76）の上で論文75のアーキを閉じ直す — [論文77]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

論文76は、位相空間（余接束 T^*M ）の上に、時空計量（底の $\sqrt{g_{00}}$ ）と速度空間曲率（繊維の $E = 4\pi/|K|$ ）を、正準シンプレクティック2形式 $\omega = dp_\mu \wedge dx^\mu$ とハミルトニアン $H(x, p)$ によって同居させる「ハミルトン・ヒンジ」を据えた。本稿はその土台に一枚めくって現れる次の標準的事実——リューヴィルの定理を扱う。ハミルトン流のもとで ω は不変（ $\mathcal{L}_{X_H}\omega = 0$ ）であり、したがって相空間体積 $\Omega = \omega^n/n!$ は保存される。ここに見かけの矛盾が生じる：この微視的な力学は可逆で、時間の矢を持たない——ところが論文75は「因果球のエントロピーは増大する（矢がある）」と述べた。本稿はこの緊張を、既知の王道の枠組みで解消（両立）する。鍵は微視(fine-grained)と粗視(coarse-grained)の区別である。微視のギブス・エントロピー $S_G = -k \int \rho \ln \rho d\Omega$ はハミルトン流のもとで厳密に一定（リューヴィルの帰結）。ゆえに時間の矢は微視法則には宿りえず、粗視化——観測の解像度——の側に宿る。論文75の因果球エントロピー $S(t) = \pi c^2 t^2 / l_P^2$ は地平線（粗視）量であり、リューヴィルの微視保存と矛盾しない。宇宙OSのレンズで読めば：OSの記憶は微視的には非破壊（情報散逸ゼロ）だが、我々の有限の解像度（粗視化）が矢を生む——ただし「OS」はレンズであり検証可能な主張ではない。射程：リューヴィルの定理は借り物の標準的事実であり、本稿は新しい数学も新しい予言も生まない。時間の矢の問題も過去仮説も解かない（Penroseの未解決予想、論文75）。微視の保存と粗視の増大は別の量・別の話であり、融合しない（別根、論文58/48）。本稿は論文75と76を繋ぐ構造的な要石の提示にとどまる。

本稿の位置づけ：本稿は確立された物理法則・数学的定理の構造的解釈である。新しい物理法則の発見も、未解決問題の解決も主張しない。用いるリューヴィルの定理・ギブスエントロピー・粗視化はすべて標準的な確立された道具であり、本稿はそれらに新たな定理を加えない。「宇宙OS」「メモリ非破壊」「解像度」といった語は解釈のためのレンズ・比喩であって、検証可能な主張ではないことを、あらかじめ明示する。

1. 序：ヒンジが保存する体積へ

論文76は、余接束 T^*M を舞台に、底の $\sqrt{g_{00}}$ （重力赤方偏移・位置）と繊維の $E = 4\pi/|K|$ （静止エネルギー・速度）を、正準シンプレクティック2形式 $\omega = dp_\mu \wedge dx^\mu$ とハミルトニアン $H(x, p)$ によって「別役割で同居」させた（ハミルトン・ヒンジ）。舞台 (T^*M, ω) を据えたなら、次に問うべき最も自然な問いはこうである：この舞台の"面積・体積"は、運動（ハミルトン流）のもとでどう振る舞うか。

答えは古典力学の礎の一つ、リウヴィルの定理である。そしてその答えは、直ちに論文75（時間の矢＝因果球エントロピーの増大）との見かけの緊張を生む。本稿は、その緊張を既知の枠組みで正しく解き、論文75と76を一つの構造の中で結ぶ。

2. 標準的事実：リウヴィルの定理

標準的事実（リウヴィルの定理）

(T^*M, ω) 上で、ハミルトニアン H の生成するハミルトンベクトル場 X_H ($\iota_{X_H}\omega = dH$) に沿って、シンプレクティック2形式は不変である：

$$\mathcal{L}_{X_H}\omega = d(\iota_{X_H}\omega) + \iota_{X_H}(d\omega) = d(dH) + 0 = 0.$$

したがってリウヴィル体積形式 $\Omega = \omega^n/n!$ もハミルトン流のもとで保存される ($\mathcal{L}_{X_H}\Omega = 0$)。同値に、相空間の密度 $\rho(x, p, t)$ は流れに沿って一定であり、リウヴィル方程式

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \{\rho, H\} = 0$$

を満たす (Arnold; Abraham--Marsden)。

幾何学的な意味は明快である。相空間の任意の領域は、ハミルトン流によって形は歪んでも、体積は決して増えも減りもしない。非圧縮な流体のように、位相空間の"インク"は伸び縮みせず、ただ混ざっていく。これは論文76のヒンジ H が生成する運動の、最も基本的な保存則である。

3. 見かけの矛盾：可逆な微視 vs 増大する粗視

リウヴィルの定理は、微視的な力学が可逆で、時間の矢を持たないことを意味する。体積が保存されるということは、過去へ向けても未来へ向けても情報は失われない——OSの言葉でいえば「メモリは非破壊」である。

ところが論文75は、逆のことを述べたように見える：因果（光）球 $r = ct$ は時間とともに成長し、そのベケンシュタイン-ホーキング・エントロピー $S(t) = \pi c^2 t^2 / l_p^2$ は単調に増大する（時間の矢がある）。

緊張 3.1（リューヴィル vs 第二法則）

微視法則（リューヴィル）は「相空間体積＝情報は保存・可逆・矢なし」と言う。巨視法則（第二法則・論文75）は「エントロピーは増大・不可逆・矢あり」と言う。両者は矛盾するのか。

これはロシュミット以来の古典的な問い（可逆性のパラドックス）であり、本稿が新たに提起するものではない。だが本稿の舞台——論文76のハミルトン・ヒンジ——の上では、この問いは正確に問える形になる。

4. 解消（王道）：矢は微視でなく粗視に宿る

標準的な答えは、微視(fine-grained)と粗視(coarse-grained)の区別にある。決定的なのは次の事実である。

標準的事実（微視ギブス・エントロピーの保存）

微視（fine-grained）ギブス・エントロピー

$$S_G = -k \int \rho \ln \rho \, d\Omega$$

は、ハミルトン流のもとで厳密に一定である。なぜなら ρ は流れに沿って一定（リューヴィル）で、体積要素 $d\Omega$ も保存されるから、 $\rho \ln \rho$ の積分は不変だからである。

この帰結は重い。時間の矢は、微視法則からは決して出てこない。ギブスの微視エントロピーは増えも減りもしないのだから。ではエントロピー増大はどこから来るのか——粗視化（coarse-graining）からである。

観察 4.1（矢の住所）

相空間の"インク"はリューヴィル流によって体積を保ったまま、糸のように引き伸ばされ、領域全体にフィラメント状に入り混じる。有限の解像度（有限のセル）で粗視化して見ると、そのセル内は「インクと余白の混合」で埋め尽くされ、実効的な占有体積は増大する。粗視化エントロピー S_{coarse} はこうして増える。微視は保存、粗視は増大。矢は"見る側の解像度"に宿る。

これは Gibbs (1902) 以来の標準的な描像であり、粗視化・部分系への制限・環境との相互作用（開放系）など、「情報を落とす操作」を一つ導入して初めて第二法則の矢が現れる、という点で一致している。本稿はこの

標準的解消を、論文76のヒンジの上で確認するだけである。

5. 宇宙OSのレンズ：メモリ非破壊と、解像度が生む矢

この標準的な事実を、体系のレンズ（比喻）で読むと次のようになる——あくまでレンズであり、検証可能な主張ではないことを重ねて明示する。

- 微視＝OSのメモリは非破壊。リューヴィルは「情報散逸ゼロ」＝熱力学的ガベージコレクションの非破壊性。宇宙OSは微視的には何も失わない。
- 粗視＝我々の描画解像度。時間の矢は、宇宙OSが情報を失うからではなく、観測者（我々）が有限のピクセル解像度でしか粗視できないから現れる。矢は「宇宙OSの性質」ではなく「レンダリングを読む側の解像度の性質」。

この読みは、論文75の「時間の矢＝因果球エントロピーの増大」を否定しない。むしろその矢が"どの層に住むか"を位置づける：論文75の矢は微視法則の矢ではなく、地平線という粗視量の矢である。

6. 論文75との整合：因果球エントロピーは粗視量である

観察 6.1（論文75はリューヴィルと矛盾しない）

論文75の因果球エントロピー $S(t) = \pi c^2 t^2 / l_P^2$ は、地平線の面積に比例する量（ベケンシュタイン-ホーキング型）であり、微視的な相空間測度 $d\Omega$ そのものではない。面積則エントロピーは本質的に粗視・境界の量である（地平線の向こうの微視自由度を数え上げず、境界の面積で代表する）。ゆえにその単調増大は、リューヴィルの微視体積保存と同じ層の主張ではなく、矛盾しない。両者は別の量・別の話である（別根、論文58/48）。

こうして、論文75（矢）と論文76（ヒンジ）は一つの構造の中で結ばれる：76のハミルトン・ヒンジが生成する微視流はリューヴィルで可逆（矢なし）、75の因果球エントロピーはその粗視的な顔で増大（矢あり）。一つの舞台 (T^*M, ω) の、微視と粗視という二つの解像度における二つの顔である。

7. 射程（何を示し、何を示さないか）

示すこと（記述的）：

- 論文76のヒンジ H が生成する流れのもとで、 ω とリューヴィル体積は保存される（標準的事実）。
- 微視ギブス・エントロピーは厳密に一定であり、ゆえに時間の矢は微視法則ではなく粗視化に宿る（観察 4.1）。

- 論文75の因果球エントロピーは粗視・境界量であり、リューヴィルの微視保存と矛盾しない（観察6.1）。これにより 75 と 76 が一つの構造で結ばれる。

示さないこと（禁欲）：

- 新しい数学ではない。リューヴィルの定理も微視ギブス・エントロピーの保存も完全に標準的である。本稿は定理を加えない。
- 時間の矢の問題を解かない。「なぜ過去が低エントロピーだったか」（過去仮説）は依然として未解決（Penrose の予想、論文75）。本稿が示すのは「矢は粗視化に宿る」という住所であって、低エントロピーな初期条件の理由ではない。
- 微視の保存と粗視の増大を融合しない。両者は別の量・別の層の話である（別根、論文58/48）。「体積が保存するのにエントロピーが増える」は矛盾ではなく、異なる二つの量の異なる振る舞いである。
- 新しい予言をしない。本枠組みは標準的な統計力学・ハミルトン力学と同じ観測結果を与える。ゆえに本稿は第2層（構造的解釈）にとどまる。

8. 結論

論文76が据えたハミルトン・ヒンジ (T^*M, ω, H) の上で、本稿はその最も基本的な保存則——リューヴィルの定理——を確認し、それが論文75の時間の矢と矛盾しないことを示した。鍵は微視と粗視の区別である：微視の相空間体積・ギブスエントロピーは厳密に保存（可逆・矢なし）、時間の矢は粗視化＝有限の解像度の側に宿る。論文75の因果球エントロピーは、その粗視・境界の顔にほかならない。

宇宙OSのレンズで言えば——OSのメモリは微視的には非破壊（情報散逸ゼロ）だが、我々の有限の解像度が矢を生む。ただし「OS」「解像度」はレンズであり、示したのは標準的な統計力学の中に論文75と76を繋ぐ正しい構造があるという観察にすぎない。過去がなぜ低エントロピーだったのかという最深の問いは、依然として開かれたままである。それでも、矢の"住所"を微視でなく粗視だと位置づけたことは、アークをもう一枚、正しく閉じ直す。

参考文献

- Liouville, J. (1838). *Sur la théorie de la variation des constantes arbitraires*. J. Math. Pures Appl. 3, 342–349.
- Gibbs, J. W. (1902). *Elementary Principles in Statistical Mechanics*. Yale University Press.
- Arnold, V. I. (1989). *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (2nd ed.). Springer.
- Abraham, R. and Marsden, J. E. (1978). *Foundations of Mechanics* (2nd ed.). Benjamin/Cummings.
- Penrose, R. (1979). *Singularities and Time-Asymmetry*. In *General Relativity: An Einstein Centenary Survey*. Cambridge University Press.

6. Yamagishi, Y. (2026). *The Arrow of Time and the Growing Causal Sphere* [論文75]. Zenodo: 10.5281/zenodo.21670183.
7. Yamagishi, Y. (2026). *A Covariant Symplectic Structure on Phase Space $\mathbf{T^*M}$: The Hamiltonian Hinge* [論文76]. Zenodo: 10.5281/zenodo.21722145.
8. Yamagishi, Y. (2026). *Distinct-Roots Discipline for Numerical Coincidences* [論文48]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602525

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)