点を一つ足すと道の総延長が短くなり、短くなるかどうかは 120 度の角が決める

— 一辺 1 の正三角形を繋ぐ最小全域木は 2.000000、中に点を一つ足すと 1.732051 で 0.133975 だけ短くなり、三本の枝は 120.000000 度ずつで交わる — 分離子は、三角形のどれかの角が 120 度以上か — [論文770]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

点を繋ぐ最短の網は、与えられた点のあいだに線を引いて作ると思われやすい。けれど、網の中に新しい点を足すと、総延長はもっと短くなる。どれだけ短くなるか、そしていつ短くならないかを数える。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、点を一つ足すと、総延長が短くなる——正三角形で 2.000000 から **1.732051** へ、短くなる割合 **0.133975**（第2節）。 第二に、足した点では、三本の枝が 120 度で交わる——三つの角が **120.000000** 度ずつ（第2節）。 第三に、これが本稿の芯である。角が 120 度以上なら、足しても短くならない——150 度の三角形では、最良の一点も頂点に落ちて 2.000000 のまま（第3節）。 第四に、点を二つ足してよければ、正方形も短くなる——最小全域木 3.000000 に対し **2.732051**、**0.910684** 倍（第3節）。 第五に、その点の位置も幾何で決まる——正方形の点の高さは **0.288675** で、$1/\sqrt{12}$ に一致（第3節）。 第六に、分離子は、三角形のどれかの角が 120 度以上かである——「最短で繋いだ」は、点を足してよいかと角を言うまで、まだ短くできるかが決まらない（第4節）。 キーワード：シュタイナー点、最小全域木、シュタイナー木、120 度の交わり、総延長、点を足す網。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——シュタイナー点、枝が 120 度で交わること、角が 120 度以上なら点が頂点に落ちること、正方形のシュタイナー木の長さ $1+\sqrt{3}$、シュタイナー比の予想は、いずれも既知である（ギルバート＆ポラック 1968、クーラント＆ロビンズ 1941）。小さな形に限る——正三角形、一つの角が 150 度の三角形、正方形だけを計算し、一般の点の集まりのシュタイナー木は計算しない。困難さを扱わない——一般の場合にシュタイナー木を求めるのが難しいことは名前を挙げるにとどめる。予想を扱わない——短くなる割合の最大についての予想は名前だけにする。実在の設計を主張しない——配管や配線や道路の設計は扱わない。既刊との関係：論文348 は、同じグラフで、繋ぐのは安く、並べるのは高いことを示した——その射程注記は、重み付きの最小全域木も近似の手法も扱わないと明記し、与えられた点を繋ぐことだけを見ていた。ここでは点を足してよければ、最小全域木より短く繋げる。与えられた点だけで繋ぐか、点を足して繋ぐかになる。加えたのは、反復でシュタイナー点を求め、角と総延長を確かめたこと、150 度の三角形で足した点が頂点に落ちることを示したこと、正方形の二点の配置を探索で求めて $1+\sqrt{3}$ と照らしたこと、分離子を「120 度以上の角があるか」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：平面の点を線で繋ぐ。与えられた点のあいだにだけ線を引く最短の網が最小全域木で、新しい点を足してよい最短の網がシュタイナー木である。三点を一点 s に繋ぐとき、総延長を最小にする s は次の反復で求まる。

$$L(s)=\sum_i \|s-p_i\|, \qquad s \leftarrow \frac{\sum_i p_i/\|s-p_i\|}{\sum_i 1/\|s-p_i\|}$$

正方形では、二つの点を対称に置き、高さ t の関数として総延長 $4\sqrt{1/4+t^2}+1-2t$ を最小にする。

問い：与えられた点を繋ぐ最短の網は、まだ短くできるのか。

2. 点を足すと、短くなる

計算 2.1：一辺 1 の正三角形で、最小全域木と、点を一つ足した網を比べた。

量	値
最小全域木	**2.000000**
点を一つ足した網	**1.732051**
比	**0.866025**
短くなる割合	**0.133975**
足した点	**(0.500000000, 0.288675135)**
三本の枝の角	**120.000000・120.000000・120.000000** 度

> **観察 2.2**
>
> 点を一つ足すと、総延長は **2.000000** から **1.732051** に短くなる。短くなる割合は **0.133975** で、足した点は重心と差 1.110×10^{-16} で一致した——与えられた点だけで繋ぐ網は、最短ではない。

> **観察 2.3**
>
> 足した点では、三本の枝が **120** 度で交わる。三つの角のずれは最大 1.421×10^{-14} 度である——三本の張力が釣り合う向きが、ちょうど **120** 度ずつだからである。

3. 短くならない形と、二点の形

計算 3.1：一つの角が **150** 度の三角形と、一辺 **1** の正方形で、同じ比べ方をした。

形	最小全域木	点を足した網	足した点
150 度の三角形	**2.000000**	**2.000000**	頂点 **(0.000000, 0.000000)**
正方形	**3.000000**	**2.732051**	二点・高さ **0.288675**

観察 3.2

これが本稿の芯である。角が 120 度以上なら、点を足しても短くならない。150 度の三角形では、反復で求めた最良の一点は 150 度の頂点に落ち、総延長は 2.000000 のままだった——その頂点ではすでに枝が 120 度より広く開いていて、中へ点を移しても得にならない。

観察 3.3

点を二つ足してよければ、正方形も短くなる。総延長は 2.732051 で、$1+\sqrt{3}$ と差 0、最小全域木の 0.910684 倍である。点の高さ 0.288675 は $1/\sqrt{12}$ に一致した——ここでも足した二点で枝は 120 度に開いている。

4. 分離子

観察 4.1

分離子は、三角形のどれかの角が 120 度以上か——以上なら足した点は頂点に落ち、何も短くならない。正三角形の 60 度では 0.133975 短くなり、150 度では 0 である——「最短で繋いだ」は、点を足してよいかと角を言うまで、まだ短くできるかが決まらない。

観察 4.2

論文348 と並べる。348 は、与えられた点を繋ぐ最小全域木が安く求まり、順に並べる巡回路が高いことを示した——ここでは、点を足してよければ、その安い最小全域木よりさらに短く繋げる。

観察 4.3

言わないこと。一般の点の集まりのシュタイナー木も、求める難しさも、短くなる割合の予想も、実在の配線も扱わない——示したのは、点を足すと短くなることと、120 度の角がそれを止めることである。

5. 点呼と結び

1. 最小全域木 **2.000000**（計算 2.1）：正三角形。
2. 点を足して **1.732051**（計算 2.1）：短くなる。
3. 割合 **0.133975**（観察 2.2）：どれだけ。
4. 比 **0.866025**（計算 2.1）：$\sqrt{3}/2$。
5. 角 **120.000000** 度（観察 2.3）：張力の釣り合い。
6. 150 度で **2.000000** のまま（観察 3.2）：本稿の芯。
7. 正方形 **2.732051**（計算 3.1）：二点を足す。
8. 比 **0.910684**（観察 3.3）：正方形の得。
9. 高さ **0.288675**（観察 3.3）：$1/\sqrt{12}$。
10. 120 度以上の角があるか（観察 4.1）：分離子・論文348。

結び：点を一つ足すと道の総延長が短くなり、短くなるかどうかは 120 度の角が決める。一辺 1 の正三角形を繋ぐ最小全域木は 2.000000 だが、中に点を一つ足すと 1.732051 になり、0.133975 だけ短くなって、三本の枝は 120.000000 度ずつで交わる——与えられた点だけで繋ぐ網は最短ではない。ところが一つの角が 150 度の三角形では、最良の一点は頂点に落ちて 2.000000 のままで、何も短くならない——その頂点ではすでに枝が 120 度より広く開いている。点を二つ足してよければ、一辺 1 の正方形も 3.000000 から 2.732051（0.910684 倍）に短くなる。分離子は、三角形のどれかの角が 120 度以上かである——「最短で繋いだ」は、点を足してよいかと角を言うまで、まだ短くできるかが決まらない。既刊との位置——論文348 は与えられた点を繋ぐ最小全域木を扱った。ここは点を足してよい網がそれより短くなることを数えた。正直に言えば——小さな三つの形だけを計算し、一般の点の集まりも実在の配線も扱っていない。

参考文献

1. Courant, R., & Robbins, H. (1941). *What Is Mathematics?* Oxford University Press.
2. Gilbert, E. N., & Pollak, H. O. (1968). Steiner minimal trees. *SIAM Journal on Applied Mathematics*.
3. 山岸勇輝 (2026). 『同じグラフで、繋ぐのは安く、並べるのは高い』[論文348]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22683555

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)