凸でない関数では、どこから始めたかが答えを決める

— $f(x) = x^4 - 3x^2 + 0.5x$ は左の極小 -1.264459（$f = -2.872457$）と右の極小 1.180734（$f = -1.648425$）を持ち、あいだの極大は 0.083725 — 分離子は、二階微分がどこでも正か、負になるところがあるか — [論文771]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— *From thinking to syncing.* —

要旨

勾配降下は、坂を下って最小を探す。坂が一つの谷なら、どこから下りても同じ底に着く。谷が二つあるとき、始点が行き先をどれだけ決めるかを数える。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、凸でない関数には、底が二つある——左の極小 -1.264459 と右の極小 1.180734、あいだに極大 0.083725（第2節）。 第二に、二つの底の深さは違う——f は左で -2.872457、右で -1.648425 で、大域の最小は左（第2節）。 第三に、これが本稿の芯である。始点が行き先を分け、ほぼ半分が浅い底に着く——1001 点のうち左へ 0.520480、右へ 0.479520（第3節）。 第四に、境を決めているのは極大の位置である——式の割合 0.520931 と、格子の割合との差は 0.000452（第3節）。 第五に、凸なら、始点は答に効かない——1001 点すべてが -0.226699 に着き、ばらつきは 1.027×10^{-15}（第3節）。 第六に、分離子は、二階微分がどこでも正か、負になるところがあるかである——「勾配降下で最小を求めた」は、関数が凸かを言うまで、どの最小かが決まらない（第4節）。 キーワード：凸性、局所最小、勾配降下、初期値依存、引き込み領域、大域最小。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——凸関数では局所最小が大域最小であること、凸でない関数では勾配降下の行き先が始点の引き込み領域で決まること、その境が極大であることは、いずれも既知である（ボイド＆ヴァンデンベルグ 2004、ノセダル＆ライト 2006）。一次元に限る——一変数の関数だけを見て、鞍点のある多次元の面は扱わない。手法を限る——刻み 0.01 の素朴な勾配降下だけを使い、確率的な方法、運動量、大きな刻みでの発散は扱わない。始点を一様に置く——$[-2, 2]$ に等間隔に置いた 1001 点を始点とする。実在の問題を主張しない——個別の学習問題や最適化問題は扱わない。既刊との関係：論文734 は、歩幅の天井を決めているのが勾配の大きさではなく、いちばん急な向きの曲率であることを示した——その射程注記は「二次関数に限る——非凸な面、鞍点…は扱わない」と明記していた。そこではどこから始めても同じ一点に着いた。ここでは凸でない面の上で、始点のほぼ半分が大域の最小でない底に着く。論文507 も引く——そこでは凸関数なら変換を二回して元に戻った。ここでは凸なら始点に依らず一点に着き、凸でなければ始点が答を分ける。加えたのは、停留点と二階微分の符号を並べたこと、1001 の始点の行き先を数え、極大の位置の式と照らしたこと、凸な関数でばらつきが 1.027×10^{-15} に収まることを示したこと、分離子を「二階微分が負になるところがあるか」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：凸でない関数 f と、凸な関数 g を置き、刻み $\eta = 0.01$ で勾配降下する。

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 0.5x, \qquad g(x) = x^4 + x^2 + 0.5x, \qquad x_{k+1} = x_k - \eta\, f'(x_k)$$

$f''(x) = 12x^2 - 6$ は $x = 0$ のあたりで負になり、$g''(x) = 12x^2 + 2$ はどこでも正である。始点は $[-2, 2]$ に等間隔の 1001 点とする。

問い：勾配降下が着く最小は、関数が決めるのか、始点が決めるのか。

2. 底が二つある

計算 2.1：$f'(x) = 0$ を二分法で解き、停留点と値と二階微分を出した。

停留点	位置	f	二階微分
左の極小	-1.264459	-2.872457	13.186278
極大	0.083725	0.020882	-5.915882
右の極小	1.180734	-1.648425	10.729604

観察 2.2

凸でない関数には底が二つあり、深さが違う。左の底は -2.872457、右の底は -1.648425 で、大域の最小は左である——二つの底のあいだに、二階微分が負の極大 0.083725 が立っている。

3. 始点が行き先を分ける

計算 3.1：1001 の始点から f と g を勾配降下し、着いた先を数えた。

量	値
f で左の極小に着いた始点	521（割合 0.520480）
f で右の極小に着いた始点	480
どちらでもない	0
極大の位置から出る割合 $(x_{\max}+2)/4$	0.520931
g で着いた先	すべて -0.226699（ばらつき 1.027×10^{-15}）

観察 3.2

これが本稿の芯である。始点が行き先を分け、ほぼ半分が浅い底に着く。大域の最小は左なのに、始点の 0.479520 は右の局所最小に着いた——勾配降下は、始点から見て下り坂の続く底を探すだけで、どちらが深いかを知らない。

観察 3.3

境を決めているのは極大の位置である。極大 0.083725 より左の始点は左へ、右の始点は右へ行き、式の割合 0.520931 と格子の割合の差は 0.000452 で、格子の刻み 0.004 より小さい——引き込み領域は、関数の形から前もって決まっている。

> **観察 3.4**
>
> 凸なら、始点は答に効かない。g では 1001 点すべてが -0.226699 に着き、ばらつきは 1.027×10^{-15} だった——底が一つなら、どこから下りても同じ底に着く。

4. 分離子

> **観察 4.1**
>
> 分離子は、二階微分がどこでも正か、負になるところがあるかである。どこでも正なら始点は効かず、負になるところがあれば、その周りの極大が引き込み領域を分ける——「勾配降下で最小を求めた」は、関数が凸かを言うまで、どの最小かが決まらない。

> **観察 4.2**
>
> 論文734 と並べる。734 は、二次関数の上で歩幅の天井を曲率が決めることを示し、非凸な面は扱わないと明記した——そこではどこから始めても同じ一点に着いた。ここでは凸でない面の上で、始点が行き先を分ける。

> **観察 4.3**
>
> 論文507 とも並べる。507 は、凸関数ならルジャンドル変換を二回して元に戻ることを示した——凸であることは、変換では戻ることを、降下では始点が効かないことを保証する。

> **観察 4.4**
>
> 言わないこと。多次元の鞍点も、確率的な方法も、実在の学習問題も扱わない——示したのは、凸でない関数では始点が答を決め、その境が極大で決まることである。

5. 点呼と結び

1. 左の極小 **-1.264459**（計算 2.1）：深い底。

2. 右の極小 **1.180734**（計算 2.1）：浅い底。
3. 極大 **0.083725**（計算 2.1）：境。
4. 深さ **-2.872457** と **-1.648425**（観察 2.2）：大域は左。
5. 右へ **0.479520**（観察 3.2）：本稿の芯。
6. 左へ **0.520480**（計算 3.1）：格子の割合。
7. 式 **0.520931**（観察 3.3）：極大が決める。
8. 差 **0.000452**（観察 3.3）：刻みより小さい。
9. 凸で **-0.226699**（観察 3.4）：始点が効かない。
10. 二階微分が負になるところがあるか（観察 4.1）：分離子・論文734・507。

結び：凸でない関数では、どこから始めたかが答を決める。$f(x) = x^4 - 3x^2 + 0.5x$ には左の極小 -1.264459（$f = -2.872457$）と右の極小 1.180734（$f = -1.648425$）があり、あいだに極大 0.083725 が立つ——大域の最小は左である。$[-2, 2]$ の 1001 点から勾配降下すると、左へ 0.520480、右へ 0.479520 に分かれ、始点のほぼ半分が浅い底に着く。境は極大の位置が決め、式の割合 0.520931 と格子の差は 0.000452 だった——勾配降下は、どちらの底が深いかを知らない。凸な $x^4 + x^2 + 0.5x$ では 1001 点すべてが -0.226699 に着き、ばらつきは 1.027×10^{-15} だった。分離子は、二階微分がどこでも正か、負になるところがあるかである——「勾配降下で最小を求めた」は、関数が凸かを言うまで、どの最小かが決まらない。既刊との位置——論文734 は二次関数に限り非凸な面を扱わないと明記した。ここはその外で、始点が行き先を分けることを数えた。正直に言えば——一次元の関数だけで、鞍点も確率的な方法も実在の問題も扱っていない。

参考文献

1. Boyd, S., & Vandenberghe, L. (2004). *Convex Optimization*. Cambridge University Press.
2. Nocedal, J., & Wright, S. J. (2006). *Numerical Optimization* (2nd ed.). Springer.
3. 山岸勇輝 (2026).『三つの別々の答は、どれも「接する」ところで決まっている』[論文507]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22861868
4. 山岸勇輝 (2026).『歩幅の天井を決めているのは勾配の大きさではなく、いちばん急な向きの曲率である』[論文734]. Zenodo. 10.5281/zenodo.23015057

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)