押せる向きの数と、行ける場所の次元は違う

— 前へ・回る・後ろへ・回り戻すを各 ε ずつ行うと、押していない横向きへ動き、横のずれ／ε^2 は $\varepsilon = 0.1$ で -0.998334、0.001 で -1.000000 — 分離子は、二つの押し方を交互に繰り返したときの食い違いが、押せる向きの外に出るか — [論文777]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— *From thinking to syncing.* —

要旨

車は横には動けない。動かせるのは前後と、ハンドルによる回転の二つだけである。それでも車は横に並んだ駐車場所に入れる。押せる向きが二つしかないのに、どうして三つ目の向きに行けるかを数える。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、押せる向きは二つ、行きたい場所は三次元——状態は位置と向きの三つ、入力は前後と回転の二つ（第2節）。 第二に、交互に押すと、押していない向きに動く——前・回る・後ろ・戻るの一回りで、横のずれ／ε^2 は -0.998334 から -1.000000 へ（第2節）。 第三に、その向きは、リー括弧が決める——数値の括弧 $(0.644218, -0.764842, 0)$ が式と差 2.184×10^{-11} で一致（第3節）。 第四に、これが本稿の芯である。括弧が押せる向きの外に出れば、全部の向きに行ける——三方向の行列式は 1.000000（第3節）。 第五に、括弧が 0 なら、行けない向きが残る——x と y にだけ押せる台車は括弧が 0 で、向き θ には行けない（第3節）。 第六に、分離子は、二つの押し方を交互に繰り返したときの食い違い（リー括弧）が、押せる向きの外に出るかである——「二つしか動かせないから、二次元しか動けない」は、括弧を言うまで真偽が決まらない（第4節）。 キーワード：劣駆動系、非ホロノミック拘束、リー括弧、到達可能性、車の運動学、縦列駐車。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——車の運動学の模型、非ホロノミックな拘束、リー括弧、括弧を足した向きが全次元に広がれば到達できること（チャウの定理）、小刻みの往復で横に動けることは、いずれも既知である（マレーほか 1994、ラヴァル 2006）。運動学だけを見る——質量、慣性、滑り、タイヤの力は扱わず、速度で動く模型だけを使う。定理を証明しない——チャウの定理や高次の括弧は名前を挙げるにとどめる。手順を勧めない——実在の車の縦列駐車の手順は扱わない。数値で確かめる——一回りの動きは中点法で積分し、括弧は差分で求めた。既刊との関係：論文601 は、15 パズルの局面の半分が、どう動かしても届かないことを示した——そこでは動かし方に付いてくる不変量が、局面の半分を届かなくした。ここでは押せる向きが二つしかないのに、交互の押し方の食い違いが三つ目の向きを作り、全部に届く。届かない側を作る不変量と、届く側を増やす括弧になる。加えたのは、一回りの動きのずれを ε の三つの値で積分し、ε^2 に比例することを示したこと、数値のリー括弧を式と照らし、行列式 $\mathbf{1.000000}$ を出したこと、括弧が 0 の台車と比べたこと、分離子を「括弧が押せる向きの外に出るか」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：車の状態を位置 (x, y) と向き θ とし、入力は前後の速さ v と回る速さ ω の二つとする。二つの入力の向き g_1 と g_2 の食い違いを表すのがリー括弧である。

$$\dot{\mathbf{q}} = v\,g_1 + \omega\,g_2, \qquad g_1 = (\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0), \quad g_2 = (0,\ 0,\ 1), \qquad [g_1, g_2] = (\sin\theta,\ -\cos\theta,\ 0)$$

前へ・左へ回る・後ろへ・右へ回り戻す、を各 ε だけ行うと、ずれは $\varepsilon^2[g_1, g_2]$ になる。

問い：押せる向きが二つしかない車は、三次元のどこへでも行けるのか。

2. 交互に押すと、押していない向きに動く

計算 2.1：向き $\theta = 0$ から一回りの動きを積分し、位置と向きのずれを出した。

ε	前後のずれ	横のずれ	横のずれ／ε^2
0.100	4.995835×10^{-4}	-9.983342×10^{-3}	-0.998334
0.010	4.999958×10^{-7}	-9.999833×10^{-5}	-0.999983
0.001	4.999999×10^{-10}	-9.999998×10^{-7}	-1.000000

> **観察 2.2**
>
> 交互に押すと、押していない横向きに動く。横のずれは ε^2 に比例し、$\varepsilon = 0.001$ で横のずれ／ε^2 は -1.000000、向きのずれは 1.857×10^{-18} 以下で戻っている——横へは押していないのに、一回りの食い違いが横へ運ぶ。

> **観察 2.3**
>
> 横へ大きく動くには、小刻みの往復を重ねる。横に 0.01 m 動くには一回の ε を 0.100000 にし、前後に合わせて 0.200000 m 動く——ずれが ε^2 なので、横の一歩は前後の一歩よりずっと小さい。

3. 括弧が向きを決める

計算 3.1：向き $\theta = 0.7$ でリー括弧を差分で求めて式と比べ、g_1・g_2・括弧の行列式を出した。x と y にだけ押せる台車の括弧も出した。

量	値
リー括弧（数値）	$(0.644218, -0.764842, 0.000000)$
式 $(\sin\theta, -\cos\theta, 0)$	$(0.644218, -0.764842, 0.000000)$
最大の差	2.184×10^{-11}
三方向の行列式	1.000000
向きを変えられない台車の括弧	$(0, 0, 0)$

> **観察 3.2**
>
> これが本稿の芯である。括弧が押せる向きの外に出れば、全部の向きに行ける。車の括弧は横向きで、g_1・g_2 と合わせた行列式は 1.000000——三つの向きがそろう——押せる向きは二つでも、行ける場所は三次元ある。

観察 3.3

括弧が 0 なら、行けない向きが残る。x と y にだけ押せる台車は、交互に押しても食い違いが 0 で、向き θ はいつまでも変わらない——押せる向きの数ではなく、押し方が互いに食い違うかどうかが、行ける次元を決める。

4. 分離子

観察 4.1

分離子は、二つの押し方を交互に繰り返したときの食い違い（リー括弧）が、押せる向きの外に出るかである。外に出れば車のように全部の向きに届き、0 なら台車のように届かない向きが残る——「二つしか動かせないから、二次元しか動けない」は、括弧を言うまで真偽が決まらない。

観察 4.2

論文601 と並べる。601 は、15 パズルの動かし方に付く不変量が、局面の半分を届かなくすることを示した——そこでは制約が届く集まりを削った。ここでは制約の下でも、交互の押し方の食い違いが届く向きを増やす。

観察 4.3

言わないこと。質量も滑りも、定理の証明も、実在の駐車の手順も扱わない——示したのは、押せる向きの数と行ける場所の次元が別で、それを括弧が分けることである。

5. 点呼と結び

1. 入力二つ・状態三つ（第1節）：劣駆動。
2. $\varepsilon = 0.1$ で $\mathbf{-0.998334}$（計算 2.1）：横へ動く。
3. $\varepsilon = 0.001$ で $\mathbf{-1.000000}$（観察 2.2）：ε^2 に比例。
4. 向きのずれ $\mathbf{1.857 \times 10^{-18}}$（観察 2.2）：向きは戻る。
5. 横に $\mathbf{0.01\ m}$ で $\boldsymbol{\varepsilon = 0.100000}$（観察 2.3）：小刻みの往復。

6. 括弧 $(0.644218, -0.764842, 0)$（計算 3.1）：式と一致。
7. 行列式 1.000000（観察 3.2）：本稿の芯。
8. 台車の括弧 0（観察 3.3）：向きに行けない。
9. 前後の合計 $0.200000\,\mathrm{m}$（観察 2.3）：横の一歩の代価。
10. 括弧が押せる向きの外に出るか（観察 4.1）：分離子・論文601。

結び：押せる向きの数と、行ける場所の次元は違う。車の模型は位置と向きの三つの状態に対し、動かせるのは前後と回転の二つだけである——それでも前・回る・後ろ・戻るの一回りで、押していない横向きへ動き、横のずれ／ε^2 は $\varepsilon = 0.1$ の -0.998334 から 0.001 の -1.000000 へ近づく。その向きはリー括弧で、数値 $(0.644218, -0.764842, 0)$ が式と差 2.184×10^{-11} で一致し、g_1・g_2 と合わせた行列式は 1.000000 で三つの向きがそろう。向きを変えられない台車では括弧が 0 で、向きには行けない——行ける次元を決めているのは、押せる向きの数ではなく、押し方の食い違いである。分離子は、二つの押し方を交互に繰り返したときの食い違い（リー括弧）が、押せる向きの外に出るかである。既刊との位置——論文601 は不変量が届く局面を半分に削ることを示した。ここは括弧が届く向きを増やすことを数えた。正直に言えば——運動学の模型だけで、質量も滑りも定理の証明も実在の駐車も扱っていない。

参考文献

1. LaValle, S. M. (2006). *Planning Algorithms*. Cambridge University Press.
2. Murray, R. M., Li, Z., & Sastry, S. S. (1994). *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press.
3. 山岸勇輝 (2026).『15 パズルの局面の半分は、どう動かしても届かない』[論文601]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22805752

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)