

n=2 の隠れた対称性 — なぜ逆二乗の軌道は閉じるのか：ラプラス-ルンゲ-レンツ・ベクトルと、論文01の力学的双子 — [論文79]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

論文01は、3次元空間で球殻質量が半径によらず一定になる密度指数が $n=2$ （逆二乗）に限られることを示し、 $n=2$ の幾何学的な唯一性を立てた。本稿はその力学的な双子を提示する：同じ $1/r^2$ の力は、他の中心力にはないもう一つの保存量——ラプラス-ルンゲ-レンツ（LRL）ベクトル $\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - m k \hat{\mathbf{r}}$ ——を持ち、それが軌道を閉じさせる（歳差しない楕円）。 $\mathbf{A}$ は楕円の長軸方向を向いて保存され、これが「なぜ惑星の軌道は閉じるのか」の答えである。この余分な保存量は、束縛状態において隠れた対称性 $SO(4)$ （Fock 1935）を生成する——通常の回転対称 $SO(3)$ より一段大きい。要点は Bertrand の定理との整合と規律である：軌道が全条件で閉じる中心力は $1/r^2$ と 調和振動子 r^2 のちょうど二つだが、両者の隠れた対称性は異なる（ $1/r^2$ は $SO(4)$ 、調和は $SU(3)$ ）。「軌道が閉じる」という値は共通でも出自は別であり、統合してはならない（別根、論文 58/48）。すなわち $n=2$ の特別さは、3D幾何（論文01）から力学（隠れた対称性）へと伝播するが、それは $n=2$ を唯一の勝者にするのではなく、 $n=2$ を「二つの特別な指数の一方・固有の対称性を持つ側」として位置づける。射程：LRLベクトル・Fock の $SO(4)$ ・Bertrand の定理はすべて借り物の標準的事実であり、本稿は新しい数学も新しい予言も生まない。何も"解かない"。これは論文01の幾何学的唯一性を、古典力学の隠れた対称性という側面から読み直す構造的解釈にとどまる。

本稿の位置づけ：本稿は確立された物理法則・定理の構造的解釈である。新しい物理法則の発見も、未解決問題の解決も主張しない。用いる LRL ベクトル・Fock の $SO(4)$ ・Bertrand の定理はすべて標準的な確立された結果であり、本稿はそれらに新たな定理を加えない。「宇宙OS」等の語は解釈のためのレンズ・比喩であって検証可能な主張ではないことを、あらかじめ明示する。

1. 序：幾何学的唯一性から力学的唯一性へ

論文01は、 $\rho(r) = r^{-n}$ の球殻質量増加率 $dm/dr = 4\pi r^{2-n}$ が半径によらず一定になるのは $n = 2$ に限る、と示した。逆二乗則は3次元空間のフラックス保存（立体角 4π ）から幾何学的に要請される、というのが論文01・02・13で繰り返し確認した芯である。

では、その $1/r^2$ の力に従う運動には、何か特別なことが起きているのか。答えは「はい」である。本稿は、 $n = 2$ の特別さが幾何学（論文01）にとどまらず、力学の側にも固有の刻印——隠れた対称性——として現れることを示す。惑星の軌道が閉じる（楕円が歳差しない）という、誰もが知る事実の背後にある構造である。

2. 準備：中心力の保存量と Bertrand の定理

任意の中心力 $\mathbf{F} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$ では、エネルギー E と角運動量 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ が保存する。 $\mathbf{L}$ の保存は運動が一平面に限られること（ケプラーの面積速度一定則）を意味する。だが E と $\mathbf{L}$ だけでは軌道が閉じるとは限らない——一般には近日点が少しずつ回る「花びら（ロゼッタ）軌道」になる。

標準的事実（Bertrand の定理, 1873）

すべての束縛初期条件に対して軌道が閉じる中心力ポテンシャル $V(r) \propto r^\beta$ は、ちょうど二つに限られる：

- $\beta = -1$ （力 $\propto 1/r^2$ 、ケプラー／クーロン）
- $\beta = +2$ （力 $\propto r$ 、等方調和振動子）

（論文01でも引用済み。）

この定理は「 $1/r^2$ で軌道が閉じる」ことを保証するが、なぜ閉じるのかは語らない。その理由が、次の余分な保存量である。

3. 余分な保存量：ラプラス–ルンゲ–レンツ・ベクトル

標準的事実（LRL ベクトルの保存）

逆二乗力 $\mathbf{F} = -\frac{k}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$ ($V = -k/r$) に対して、

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - mk\hat{\mathbf{r}}$$

は保存する ($d\mathbf{A}/dt = \mathbf{0}$)。この保存は逆二乗力に固有であり、一般の中心力では成り立たない。 $\mathbf{A}$ は軌道面内にあり、その大きさは $|\mathbf{A}| = mke$ (e は離心率)、向きは楕円の長軸（近日点方向）を指す。

$\mathbf{A}$ の保存は「余分」である。中心力なら誰でも $E, \mathbf{L}$ (4つの独立な保存量) を持つが、 $1/r^2$ はさらに $\mathbf{A}$ を持つ。この過剰な保存量が、軌道を強く縛る。

4. なぜ軌道が閉じるのか

観察 4.1（閉軌道の直接の理由）

$\mathbf{A}$ は楕円の長軸方向に、大きさも向きも一定に保たれる。長軸の向きが時間で変わらないということは、近日点が歳差しないということ——すなわち軌道は毎周期びたりと重なり、閉じる。もし力がわずかでも $1/r^2$ からずれば $\mathbf{A}$ は保存されず、長軸はゆっくり回り、軌道はロゼッタになる。「軌道が閉じる」とは「 $\mathbf{A}$ が保存する」ことの別の言い方である。

こうして Bertrand の定理の $1/r^2$ 側の中身が説明される：閉軌道は、幾何学的偶然ではなく、逆二乗に固有の余分な保存量 $\mathbf{A}$ の帰結である。（史実として水星の近日点の"残る"歳差は、太陽重力が厳密な $1/r^2$ からずれる——一般相対論——ことの現れであり、 $\mathbf{A}$ の非保存の実例である。）

5. 隠れた対称性：束縛状態の $SO(4)$

余分な保存量は、通常より大きな対称性の影である（Noether の逆向き）。角運動量 $\mathbf{L}$ は空間回転 $SO(3)$ に対応する。 $1/r^2$ ではさらに $\mathbf{A}$ が加わり、両者が合わさってより大きな対称群を生成する。

標準的事実 (Fock 1935/Bargmann 1936)

逆二乗（ケプラー）問題の束縛状態は、隠れた対称性 $SO(4)$ を持つ（ $\mathbf{L}$ と、適切に規格化した $\mathbf{A}$ が $SO(4)$ の生成子をなす）。Fock は運動量空間で、束縛ケプラー問題が3次元球面 S^3 上の自由運動と等価であることを示した—— S^3 の回転対称 $SO(4)$ が、実空間の隠れた対称性の正体である。

（この S^3 は、本体系でホップ・ファイブレーション $S^3 \rightarrow S^2$ として繰り返し現れた球面と同じ舞台であるが、両者を同一視するのは本稿の主張ではない——文脈が異なる二つの S^3 の出現は、別途 別根の規律で吟味すべき"韻"にとどめる。論文67・68。）

6. 別根の規律：二つの閉軌道は、二つの異なる対称性

ここで論文58・48の規律が効く。Bertrand は「閉軌道は $1/r^2$ と 調和振動子 の二つ」と言う。だが両者の隠れた対称性は異なる。

ポテンシャル	閉軌道	余分な保存量	隠れた対称性
$V = -k/r$ (逆二乗)	閉じる	LRL ベクトル $\mathbf{A}$	$SO(4)$ (束縛状態、Fock)
$V = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ (調和)	閉じる	対称テンソル (Fradkin テンソル)	$SU(3)$

観察 6.1 (「閉じる」は共通の値、対称性は別根)

$1/r^2$ と 調和振動子 は「軌道が閉じる」という値を共有するが、その理由——隠れた対称性——は $SO(4)$ と $SU(3)$ で異なる。これは論文58/48の別根規律の一例である：同じ結果（閉軌道）を、値が一致するからといって同じ起源と見なしてはならない。 $n = 2$ は「閉軌道クラブ」の唯一の会員ではなく、固有の対称性 $SO(4)$ を持つ一方の会員である。

7. 体系への接続と、OSレンズ

論文01は $n = 2$ の幾何学的唯一性（3Dフラックス保存＝立体角 4π ）を立てた。本稿はその同じ $1/r^2$ が、力学的にも固有の刻印（LRL ベクトルと隠れた $SO(4)$ ）を持つことを示した。すなわち $n = 2$ の特別さは、幾何から力学へ伝播する——ただし"唯一の勝者"ではなく、Bertrand のもう一方（調和・ $SU(3)$ ）とは別根の、固有の対称性を持つ側として。

体系のレンズ（比喩）で読むと——あくまでレンズであり検証可能な主張ではない——閉軌道とは、宇宙OSがドリフトなしに描き続けられる安定なループであり、余分な保存量 $\mathbf{A}$ は「毎フレーム同じ楕円を再描画するための、長軸を固定する追加のロック」にあたる。 $1/r^2$ が持つこの追加ロックこそ、3D幾何が選んだ力（論文01）の"おまけの安定性"である。

8. 射程（何を示し、何を示さないか）

示すこと（記述的）：

- $1/r^2$ は余分な保存量 LRL ベクトル $\mathbf{A}$ を持ち、それが軌道を閉じさせる（歳差しない）（3-4節）。
- $\mathbf{A}$ と $\mathbf{L}$ は束縛状態で隠れた対称性 $SO(4)$ を生成する（Fock）（5節）。
- Bertrand の二つの閉軌道（ $1/r^2$ と 調和）は、 $SO(4)$ と $SU(3)$ という異なる隠れた対称性を持つ＝別根（6節）。 $n=2$ の特別さは論文01の幾何から力学へ伝播する（7節）。

示さないこと（禁欲）：

- 新しい数学ではない。LRL ベクトル・Fock の $SO(4)$ ・Bertrand の定理はすべて標準的である。本稿は定理を加えない。
- $n=2$ を"唯一の閉軌道"とは主張しない。閉軌道は $1/r^2$ と 調和の二つ（Bertrand）。本稿は $n=2$ を「固有の対称性を持つ一方」と位置づけるだけである。
- 二つの S^3 を同一視しない。Fock の運動量空間 S^3 と、体系のホップ S^3 （67/68）の出現は、別途吟味すべき"韻"であって融合ではない（別根、58/48）。
- 新しい予言をしない。本枠組みは標準的な古典力学と同じ観測結果を与える。ゆえに本稿は第2層（構造的解釈）にとどまる。「OS」「ロック」はレンズである。

9. 結論

論文01は「 $n=2$ は幾何学的に特別」を示した。本稿はその力学的双子を示した：同じ逆二乗の力は、他にない余分な保存量——ラプラス-ルンゲ-レンツ・ベクトル——を持ち、それが軌道を歳差なく閉じさせ、束縛状態で隠れた対称性 $SO(4)$ を生成する。「なぜ惑星の軌道は閉じるのか」の答えは、 $1/r^2$ に固有のこの余分な対称性である。

ただし規律を忘れない：閉軌道は $1/r^2$ の専有ではなく、調和振動子と分け合う二人クラブであり、両者の対称性（ $SO(4)$ と $SU(3)$ ）は別根である。 $n=2$ の特別さは、3D幾何（論文01）から力学（隠れた対称性）へと確かに伝播するが、それは唯一性の主張ではなく、幾何が選んだ力が、力学の側でも固有の刻印を帯びているという構造の観察にとどまる。何も新しく解いてはいない——ただ、逆二乗がなぜこれほど"うまくできている"かを、もう一枚めくって見せただけである。

参考文献

1. Bertrand, J. (1873). *Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe*. C. R. Acad. Sci. Paris 77, 849–853.
 2. Laplace, P.-S. (1799). *Traité de mécanique céleste*, Tome I.
 3. Runge, C. (1919). *Vektoranalysis*. Hirzel, Leipzig.
 4. Lenz, W. (1924). *Über den Bewegungsverlauf und die Quantenzustände der gestörten Keplerbewegung*. Z. Phys. 24, 197–207.
 5. Fock, V. (1935). *Zur Theorie des Wasserstoffatoms*. Z. Phys. 98, 145–154.
 6. Bargmann, V. (1936). *Zur Theorie des Wasserstoffatoms*. Z. Phys. 99, 576–582.
 7. Goldstein, H. (1980). *Classical Mechanics* (2nd ed.). Addison-Wesley.
 8. Yamagishi, Y. (2026). *The Uniqueness Theorem of $n=2$ for Spherically Symmetric Density Distributions* [論文01]. Zenodo: 10.5281/zenodo.21403186.
 9. Yamagishi, Y. (2026). *Distinct-Roots Discipline for Numerical Coincidences* [論文48]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602525
-

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)