二本の腕の届き方は目標の場所で 0・1・2 通りに分かれ、関節を足すと途切れない幅になる

— 0.1・0.2・0.5・0.8・0.9 m の目標に届く関節の角度の組は 0・1・2・1・0 通りで、関節を三つにすると幅 1.664695 rad にわたり途切れず続く — 分離子は、目標が届く範囲の内か縁か外か、そして関節の数が目標の自由度を超えるか — [論文791]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

ロボットの腕で「その場所に届くか」を問うとき、答は届くか届かないかの二つに見える。二本と三本の平面の腕で、目標の置き場所ごとに関節の角度の組が何通りあるかと、縁の近くで払う代価を数える。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、届く範囲の内側では、届き方が二通りある——目標までの距離 0.5 m で 2 通り（肘を上げる形と下げる形）（第2節）。 第二に、縁ではちょうど一通り、外ではゼロ——0.2・0.8 m で 1 通り、0.1・0.9 m で 0 通り。ニュートン法でも同じ数（第2節）。 第三に、これが本稿の芯である。縁に近づくほど、届くための代価が跳ね上がる——手先を 0.1 m/s で外へ動かす関節の速さは、$r = 0.7$ m で 0.568591、0.7999 m で 17.440886 rad/s（第3節）。 第四に、届く範囲は輪の形をしている——面積 1.884956 m^2、乱数で 0.736870（式 0.736311）（第2節）。 第五に、関節を一つ足すと、解は数えられる個数ではなくなる——同じ目標に届く一つ目の関節の角度は、幅 1.664695 rad（全周の 0.264944）にわたって途切れない（第4節）。 第六に、分離子は、目標が届く範囲の内か縁か外か、そして関節の数が目標の自由度を超えるかである——「この腕はその場所に届くか」は、何通りで届くかと、縁での代価を言うまで答にならない（第5節）。 キーワード：逆運動学、ロボットの腕、特異姿勢、作業領域、冗長自由度、ヤコビアン。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——二関節の平面の腕の逆運動学、肘の上下の二つの解、作業領域の縁で解が重なりヤコビアンが消えること（特異姿勢）、関節が目標の自由度より多いと解が連続になること（冗長性）は、いずれも既知である（クレイグ 2005、シチリアーノほか 2009）。運動学だけを見る——力・質量・動力学、関節の可動域、障害物は入れない。平面に限る——三次元の腕や手先の向きは扱わない。寸法は代表値である——腕の長さ 0.5 m・0.3 m と、三関節の 0.4・0.25・0.15 m は比べるための値。制御の方法を扱わない——実在のロボットがどの解を選ぶかは述べない。既刊との関係：論文236 は、同じ「＝0」でも、解の集まりが五つの別の種類のものであることを示した——その射程注記は、どの節も既知の解を数えるだけで、解の存在定理は証明しないと明記していた。そこではどの数の世界で解くかで解の集まりの種類が分かれた。ここでは同じ腕の式でも、目標の置き場所と関節の数で、解の数が 0・1・2・途切れない幅に分かれることを数える。加えたのは、五つの距離で解の数を式とニュートン法の二通りで数えたこと、縁の近くでヤコビアンと関節の速さを出したこと、届く範囲の面積を式と乱数で出したこと、関節を三つにしたときの解の幅を出したこと、分離子を「内か縁か外か」と「関節の数」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：長さ L_1・L_2 の平面の腕の関節の角度を θ_1・θ_2 とする。手先の位置、目標までの距離 r から肘の角度を決める式、ヤコビアンの行列式は次のとおりである。

$$x = L_1\cos\theta_1 + L_2\cos(\theta_1+\theta_2), \qquad y = L_1\sin\theta_1 + L_2\sin(\theta_1+\theta_2)$$

$$\cos\theta_2 = \frac{r^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1L_2}, \qquad \det J = L_1L_2\sin\theta_2$$

右辺の絶対値が 1 より小さければ θ_2 は正負の二つ、ちょうど 1 なら一つ、超えれば無い。$L_1 = 0.5$ m、$L_2 = 0.3$ m と置く。

問い：腕は目標に届くか。届くなら何通りで届き、何を払うか。

2. 届き方の数

計算 2.1：五つの距離の目標で、式で解を出し、ニュートン法（初期値 144 通り）で見つかった解の数と比べた。

目標までの距離	式の解	ニュートン法の解	手先の誤差（最大）
0.1 m	0 通り	0 通り	—
0.2 m	1 通り	1 通り	6.94×10^{-18} m
0.5 m	2 通り	2 通り	7.85×10^{-17} m
0.8 m	1 通り	1 通り	5.55×10^{-17} m
0.9 m	0 通り	0 通り	—

> **観察 2.2**
>
> 届く範囲の内側では二通り、縁では一通り、外ではゼロ。0.5 m では肘を上げる形と下げる形の二つがあり、内縁 0.2 m と外縁 0.8 m では二つが重なって一つ、0.1 m と 0.9 m には届かない——「届く」は二値ではなく、0・1・2 の三つの答を持つ。

> **観察 2.3**
>
> 届く範囲は輪の形をしている。面積は $\pi\{(L_1+L_2)^2-(L_1-L_2)^2\} = 1.884956$ m^2 で、一辺 1.6 m の正方形の 0.736311、乱数では 0.736870 だった。

3. 縁での代価

計算 3.1：外縁の近くで、ヤコビアンの行列式と、手先を外向きに 0.1 m/s で動かすのに要る関節の速さを出した。

目標までの距離	ヤコビアンの行列式	関節の速さ
0.7 m	1.299038×10^{-1}	0.568591 rad/s
0.79 m	4.818503×10^{-2}	1.749174 rad/s
0.799 m	1.546644×10^{-2}	5.516748 rad/s
0.7999 m	4.898173×10^{-3}	17.440886 rad/s

観察 3.2

これが本稿の芯である。縁に近づくほど、届くための代価が跳ね上がる。外縁まで 0.1・0.01・0.001・0.0001 m と近づくと、ヤコビアンの行列式は 1.299038×10^{-1} から 4.898173×10^{-3} へ小さくなり、同じ手先の速さに要る関節の速さは 0.568591 から 17.440886 rad/s へ増え続ける——縁では二つの解が一つに重なり、その手前ではわずかな手先の動きに大きな関節の動きが要る。

4. 関節を一つ足す

計算 4.1：関節を三つ（0.4・0.25・0.15 m）にし、目標 $(0.5, 0.2)$ に届くように一つ目の関節の角度を 36000 通り動かして、残る二本で届く角度の幅を数えた。

観察 4.2

関節を一つ足すと、解は数えられる個数ではなくなる。一つ目の関節の角度は幅 1.664695 rad（全周の 0.264944）にわたって途切れず、そのどこでも残る二本で目標に届く——関節の数が目標の自由度（平面の位置の 2）を超えると、解は 0・1・2 通りではなく途切れない幅になる。

5. 分離子

観察 5.1

分離子は、目標が届く範囲の内か縁か外か、そして関節の数が目標の自由度を超えるかである。二本の腕では内で 2、縁で 1、外で 0 通りで、縁の近くでは関節の速さが 17.440886 rad/s まで跳ね上がる。三本では幅 1.664695 rad の途切れない解になる——「この腕はその場所に届くか」は、何通りで届くかと、縁での代価を言うまで答にならない。

観察 5.2

論文236 と並べる。236 は、同じ「＝0」でも、どの数の世界で解くかで解の集まりの種類が五つに分かれることを示した——ここでは同じ腕の式でも、目標の置き場所と関節の数で、解の数が 0・1・2・途切れない幅に分かれることを数えた。

> **観察 5.3**
>
> 言わないこと。力や質量、関節の可動域、障害物、三次元の腕、実在のロボットの制御は扱わない——示したのは、届くかどうかの問いが、解の数と縁の代価を持つことである。

6. 点呼と結び

1. **0.5 m** で **2** 通り（計算 2.1）：肘の上下。
2. 縁 **0.2・0.8 m** で **1** 通り（観察 2.2）：二つが重なる。
3. 外 **0.1・0.9 m** で **0** 通り（観察 2.2）：届かない。
4. 届く範囲 **1.884956 m²**（観察 2.3）：輪の形。
5. $r = 0.7$ **m** で **0.568591 rad/s**（計算 3.1）：縁から遠い。
6. $r = 0.7999$ **m** で **17.440886 rad/s**（観察 3.2）：本稿の芯。
7. 行列式 $\mathbf{4.898173 \times 10^{-3}}$（計算 3.1）：縁でゼロに近づく。
8. 三関節で幅 **1.664695 rad**（観察 4.2）：途切れない解。
9. 全周の **0.264944**（観察 4.2）：解の幅の割合。
10. 内か縁か外か、関節の数（観察 5.1）：分離子・論文**236**。

結び：同じ二本の腕でも、目標の置き場所で届き方は **0・1・2** 通りに分かれ、関節を一つ足すと途切れない幅になる。長さ **0.5 m** と **0.3 m** の平面の腕で、目標までの距離 **0.1・0.2・0.5・0.8・0.9 m** に届く角度の組は **0・1・2・1・0** 通りで、ニュートン法で探しても同じ数になり、届く範囲は面積 **1.884956 m²** の輪である——「届く」は二値ではなく三つの答を持つ。外縁に近づくと、手先を **0.1 m/s** で外へ動かす関節の速さは **0.568591** から **17.440886 rad/s** へ跳ね上がり、関節を三つにすると同じ目標に届く角度は幅 **1.664695 rad** にわたって途切れず続く——縁では解が重なって代価が跳ね、関節が目標の自由度を超えると解は幅になる。分離子は、目標が届く範囲の内か縁か外か、そして関節の数が目標の自由度を超えるかである。既刊との位置——論文**236** は解の集まりの種類を数えた。ここは同じ式の解の数が置き場所と関節の数で入れ替わることを数えた。正直に言えば——平面の運動学だけで、力も可動域も実在の制御も扱っていない。

参考文献

1. Craig, J. J. (2005). *Introduction to Robotics: Mechanics and Control* (3rd ed.). Pearson Prentice Hall.
2. Siciliano, B., Sciavicco, L., Villani, L., & Oriolo, G. (2009). *Robotics: Modelling, Planning and Control*. Springer.

3. 山岸勇輝 (2026). 『同じ「＝0」でも、解の集まりは五つの別の種類のものである』[論文236]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22129043

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)