流す仕事と血の代価を最小にすると、流量は半径の三乗に比例し分かれ目でずり応力が保たれる

— 流量と最適な半径の対数の傾きは **3.000000** で、二本に分かれると子の半径は親の **0.793701** 倍、壁のずり応力は **1.000000** 倍に保たれる — 分離子は、何を最小にするか（流す仕事と血を保つ代価の和か、断面積や流速を保つことか） — [論文795]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

血管は枝分かれするたびに細くなる。太い管ほど血を流す仕事は小さいが、そのぶん多くの血を体に保たなければならない。流す仕事と血を保つ代価の和を最小にする半径を数値で探し、流量との関係、枝分かれでの半径・断面積・流速・壁のずり応力、分かれる角度を数える。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、これが本稿の芯である。最適な半径の三乗が、流量に比例する——流量を 10^{-4} から 10^{-9} $\mathrm{m^3/s}$ まで変えたときの対数の傾きは **3.000000**（第2節）。 第二に、同じ太さに分かれると、子の半径は親の $2^{-1/3}$ 倍になる——**0.793701** 倍で、断面積の合計は **1.259921** 倍に増える（第3節）。 第三に、枝分かれしても、壁のずり応力は変わらない——子と親の比は **1.000000**、流速は **0.793701** 倍に下がる（第3節）。 第四に、断面積を保つ分かれ方は、最適ではない——子の代価は最適の **1.058267** 倍、流す仕事は **1.587401** 倍（第3節）。 第五に、分かれる角度も、同じ最小化から決まる——片側 **37.467311** 度、両側で **74.934622** 度（第4節）。 第六に、分離子は、何を最小にするか（流す仕事と血を保つ代価の和か、断面積や流速を保つことか）——「血管は枝分かれしても流れを保つように細くなる」は、何を保つと言うのかを言うまで真偽が決まらない（第5節）。 キーワード：マレーの法則、血管の枝分かれ、管の流れ、最小の仕事、壁のずり応力、分岐角。

> 本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——流す仕事と血の体積の代価の和を最小にすると流量が半径の三乗に比例すること（マレーの法則）、そのとき壁のずり応力が一定になること、枝分かれの角度が同じ最小化から決まることは、いずれも既知である（マレー 1926、シャーマン 1981）。代価は置いた値である——血を保つ代価 b は、流量 $10^{-4}\ \mathrm{m^3/s}$ で半径 $0.0125\ \mathrm{m}$ が最適になるように置いた比べのための値で、測った値ではない。流量と半径の関係の傾きと、枝分かれの比は b に依らない。流れを簡単にする——ニュートン流体・層流・定常の管の流れだけで、脈動、乱流、赤血球による粘度の変化、壁の弾性は入れない。実在の血管を主張しない——体のどの血管がこの形に従うかは述べない。分かれ方は同じ太さの二本だけ——太さの違う二本や三本以上には立ち入らない。既刊との関係：論文576 は、配水管を太くすると水が古くなることを示した——その射程注記は一本の管だけを見て、管網での混ざり方やループは入れていないと明記していた。そこでは一本の管の太さが、流速と水の古さの取り引きを決めた。ここでは枝分かれする管の網で、流す仕事と保つ代価の取り引きが、流量と半径の三乗の関係と、分かれる角度を決めることを数える。加えたのは、最適な半径を数値で探し、四つの流量で式と一致させ、傾き 3.000000 を出したこと、枝分かれで半径・断面積・流速・壁のずり応力を並べたこと、断面積を保つ分かれ方と代価を比べたこと、分かれ目の角度を数値と式の二通りで出したこと、分離子を「何を最小にするか」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：血の粘度を μ、流量を Q、管の半径を r、血を保つ代価を体積あたり b とする。長さあたりの代価 C は、流す仕事と血を保つ代価の和である。

$$C(r) = \frac{8\mu Q^2}{\pi r^4} + b\,\pi r^2, \qquad \frac{dC}{dr} = 0 \implies Q = \pi r^3 \sqrt{\frac{b}{16\mu}}, \qquad \tau = \frac{4\mu Q}{\pi r^3}$$

同じ太さの二本に分かれて流量が半分ずつになると、最適な子の半径は $r_1^3 = r_0^3/2$ を満たす。τ は壁のずり応力で、Q/r^3 に比例する。$\mu = 3.5 \times 10^{-3}\ \mathrm{Pa\,s}$ と置き、b は流量 $10^{-4}\ \mathrm{m^3/s}$ で半径 $0.0125\ \mathrm{m}$ が最適になるように $14.874015\ \mathrm{W/m^3}$ とした。

問い：枝分かれする管の太さは、何で決まるのか。

2. 流量と半径

計算 2.1：四つの流量で、代価 C を最小にする半径を黄金分割で探し、式と比べた。

流量	最適な半径（数値）	式
1.0×10^{-4} m^3/s	$1.249999998 \times 10^{-2}$ m	$1.250000000 \times 10^{-2}$ m
5.0×10^{-5} m^3/s	$9.921256577 \times 10^{-3}$ m	$9.921256575 \times 10^{-3}$ m
1.0×10^{-6} m^3/s	$2.693043358 \times 10^{-3}$ m	$2.693043363 \times 10^{-3}$ m
1.0×10^{-9} m^3/s	$2.693043357 \times 10^{-4}$ m	$2.693043363 \times 10^{-4}$ m

> **観察 2.2**
>
> これが本稿の芯である。最適な半径の三乗が、流量に比例する。流量を 10^{-4} から 10^{-9} m^3/s まで五桁変えたとき、流量と最適な半径の対数の傾きは 3.000000 である——流す仕事は半径の -4 乗、保つ代価は 2 乗で効き、その釣り合いが三乗の関係を作る。

3. 枝分かれ

計算 3.1：流量を半分にしたときの最適な半径を探し、親と比べた。断面積を保つ分かれ方（子の半径＝親$/\sqrt{2}$）の代価とも比べた。

量（子／親）	値
半径	0.793701（$2^{-1/3} = 0.793701$）
断面積の合計	1.259921
流速	0.793701
壁のずり応力	1.000000
断面積を保つ分かれ方の子の代価／最適	1.058267
その流す仕事／最適の流す仕事	1.587401

観察 3.2

同じ太さに分かれると、子の半径は親の $2^{-1/3}$ 倍になる。子の半径は 0.793701 倍で、二本の断面積の合計は親の 1.259921 倍に増え、流速は 0.793701 倍に下がる——枝分かれするほど管の総断面積は広がり、流れはゆっくりになる。

観察 3.3

枝分かれしても、壁のずり応力は変わらない。子と親のずり応力の比は 1.000000 である——流量が半径の三乗に比例するので、Q/r^3 に比例するずり応力はどの枝でも同じになる。

観察 3.4

断面積を保つ分かれ方は、最適ではない。子の半径を親$/\sqrt{2}$ にして流速を保つと、子の代価は最適の 1.058267 倍、流す仕事は 1.587401 倍になる——流速を保つことと、代価の和を最小にすることは別の要求である。

4. 分かれる角度

計算 4.1：親の管が原点から、二本の子が $(1, \pm 0.5)$ に向かうとして、分かれ目の位置を代価の合計が最小になるように黄金分割で探し、片側の角度を出した。式は $\cos\theta = w_0/(2w_1)$（w は長さあたりの最適な代価）である。

量	値
片側の角度（数値）	37.467311 度
片側の角度（式）	37.467311 度
$\arccos 2^{-1/3}$	37.467311 度
両側の合計	74.934622 度

観察 4.2

分かれる角度も、同じ最小化から決まる。片側の角度は数値と式が差 1.950×10^{-7} 度で一致して **37.467311** 度、両側で **74.934622** 度である——最適な代価は半径の二乗に比例するので、角度は $\arccos 2^{-1/3}$ という半径の比だけの数になる。

5. 分離子

観察 5.1

分離子は、何を最小にするか（流す仕事と血を保つ代価の和か、断面積や流速を保つことか）。代価の和を最小にすれば子の半径は **0.793701** 倍でずり応力が保たれ、断面積を保てば流速が保たれるが代価は **1.058267** 倍になる——「血管は枝分かれしても流れを保つように細くなる」は、何を保つと言うのかを言うまで真偽が決まらない。

観察 5.2

論文576 と並べる。576 は一本の配水管で、太さが流速と水の古さの取り引きを決めることを示し、管網は入れなかった——ここでは枝分かれする管の網で、流す仕事と保つ代価の取り引きが三乗の関係と角度を決めることを数えた。

観察 5.3

言わないこと。代価 b の実測、脈動や乱流、実在の血管の寸法は扱わない——示したのは、一つの最小化から三乗の関係、ずり応力の一定、分かれる角度がそろって出ることである。

6. 点呼と結び

1. 傾き **3.000000**（観察 2.2）：本稿の芯。
2. 子の半径 **0.793701** 倍（観察 3.2）：$2^{-1/3}$。
3. 断面積の合計 **1.259921** 倍（観察 3.2）：広がる。
4. 流速 **0.793701** 倍（観察 3.2）：ゆっくりになる。

5. ずり応力 **1.000000** 倍（観察 3.3）：保たれる。
6. 断面積を保つと代価 **1.058267** 倍（観察 3.4）：最適ではない。
7. その流す仕事 **1.587401** 倍（観察 3.4）：別の要求。
8. 片側 **37.467311** 度（観察 4.2）：分かれる角度。
9. 両側 **74.934622** 度（計算 4.1）：半径の比だけで決まる。
10. 何を最小にするか（観察 5.1）：分離子・論文576。

結び：流す仕事と血を保つ代価の和を最小にすると、流量は半径の三乗に比例し、枝分かれで壁のずり応力が保たれる。流量を五桁変えても、流量と最適な半径の対数の傾きは 3.000000 で、同じ太さの二本に分かれると子の半径は親の 0.793701 倍、断面積の合計は 1.259921 倍、流速は 0.793701 倍、ずり応力は 1.000000 倍になる——流す仕事と保つ代価の釣り合いが、三乗の関係とずり応力の一定をいっしょに作る。断面積を保つ分かれ方にすると子の代価は最適の 1.058267 倍になり、分かれ目の片側の角度は同じ最小化から 37.467311 度に決まる——流速を保つことと代価を最小にすることは別の要求である。分離子は、何を最小にするか（流す仕事と血を保つ代価の和か、断面積や流速を保つことか）である。既刊との位置——論文576 は一本の管の太さの取り引きを数えた。ここは枝分かれする管の網の取り引きを数えた。正直に言えば——代価は置いた値で、脈動も乱流も実在の血管の寸法も扱っていない。

参考文献

1. Murray, C. D. (1926). The physiological principle of minimum work: I. The vascular system and the cost of blood volume. *Proceedings of the National Academy of Sciences*.
2. Sherman, T. F. (1981). On connecting large vessels to small: The meaning of Murray’s law. *Journal of General Physiology*.
3. 山岸勇輝 (2026).『配水管は、太くすると水が古くなる』[論文576]. Zenodo. 10.5281/zenodo.23014315

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)