

Una interpretación estructural de la conjetura de Poincaré 4D y de las estructuras exóticas mediante el teorema de unicidad $n=3$ y la fibración de Hopf

— Parche de masa unitario hiperesférico $2\pi^2$, capullo toroidal $16\pi^2$ y frontera geométrico-informacional del $\mathbb{R}^4$ exótico — [Artículo 08]

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japón
Septiembre de 2026 (Cuarta edición)

— *From thinking to syncing.* —

Resumen

Para la conjetura de Poincaré topológica en dimensión cuatro (teorema de Freedman) y las estructuras diferenciables exóticas del espacio euclídeo de dimensión cuatro ($\mathbb{R}^4$ exótico), presentamos una interpretación estructural basada en el teorema de unicidad $n = 3$ y la fibración de Hopf. La argumentación avanza en tres etapas.

Primera etapa: en $\mathbb{R}^4$, la tasa de crecimiento de la masa de la cáscara $dm/dr = 2\pi^2 r^{3-n}$ de una densidad $\rho(r) = r^{-n}$ es constante solo para $n = 3$, y su valor es el volumen de la 3-esfera $\text{Vol}(S^3) = 2\pi^2$ (teorema 2.1).

Segunda etapa: para la fibración de Hopf $S^1 \hookrightarrow S_R^3 \rightarrow S_{R/2}^2$ de la 3-esfera de radio R , el producto del área de la base πR^2 por la circunferencia de la fibra $2\pi R$ es igual al volumen del espacio total $2\pi^2 R^3$, para todo R (teorema 3.1). En $R = 2$ ambos factores toman el valor numérico 4π , y $16\pi^2 = \text{Vol}(S_{R=2}^3) = 4\pi \times 4\pi$ se realiza como una descomposición geométrica efectiva (teorema 3.3). El capullo toroidal $16\pi^2$ queda así fijado, antes de ser el producto algebraico $(4\pi)^2$, como **un único objeto geométrico: la 3-esfera de radio dos**. Como la coincidencia de los dos factores compara un área $[L^2]$ con una longitud $[L]$, reescalar la unidad de longitud por un factor λ desplaza el radio de coincidencia a $R = 2/\lambda$. Lo que no depende de las unidades es el cociente entre magnitudes de la misma dimensión, $\text{Vol}(S_{R=2}^3)/\text{Vol}(S_{R=1}^3) = 2^3 = 8$ (corolario 3.4).

Tercera etapa: el hecho de que existan infinitos no numerables $\mathbb{R}^4$ exóticos solo en dimensión cuatro se lee, en el lenguaje de la geometría de la información, como el paso del ángulo sólido 4π a $16\pi^2$ (sección 4).

Alcance (scope note): este artículo presenta una **interpretación estructural** de resultados establecidos de la topología en dimensión cuatro. La conjetura de Poincaré topológica en dimensión cuatro fue resuelta por Freedman (1982); este artículo solo la cita y no tiene parte alguna en su demostración. La conjetura de Poincaré suave en dimensión cuatro sigue abierta. La existencia de $\mathbb{R}^4$ exóticos se sigue de la clasificación topológica de Freedman junto con la teoría gauge de Donaldson; Gompf (1985) construyó una familia infinita, y Taubes (1987) mostró que hay infinitos no numerables. La lectura de la sección 4 no es una derivación de estos resultados, y si existe una correspondencia rigurosa entre el factor de volumen $2^3 = 8$ y la teoría de las formas de intersección es una cuestión abierta. La descomposición del teorema 3.1 se cumple como caso estándar de la fórmula del volumen para una submersión riemanniana con fibras totalmente geodésicas (cuando la longitud de la fibra es constante, el volumen del espacio total es el volumen de la base por la longitud de la fibra). **Lo que este artículo añade** es que fija $2\pi^2$ como parche unitario de dimensión cuatro mediante el teorema de unicidad $n = 3$ y lo despliega en la estructura de fibras de Hopf; que da a la magnitud recurrente $16\pi^2$ una sustancia, **la 3-esfera de radio dos**, dentro de la cual base y fibra se reparten 4π cada una; y que distingue lo que se desplaza con la elección de unidades —el radio en el que ese reparto se hace visible— de lo que no se desplaza, el cociente de volúmenes **8**.

1. Introducción: la singularidad de la topología 4D y la conjetura de Poincaré

1.1 La conjetura de Poincaré 4D y el teorema de Freedman

Michael Freedman (1982) resolvió la conjetura de Poincaré en dimensión cuatro en la categoría topológica.

1.2 La singularidad de la topología diferencial en dimensión cuatro ($\mathbb{R}^4$ exótico)

Combinando la clasificación topológica de Freedman con la teoría gauge de Simon Donaldson (1983), se sigue que el espacio euclídeo de dimensión cuatro $\mathbb{R}^4$ admite estructuras diferenciables no difeomorfas a la estándar ($\mathbb{R}^4$ exótico). Robert Gompf (1985) construyó una familia infinita de ellas, y Clifford Taubes (1987) mostró que hay infinitas no numerables. Para $n \neq 4$ el espacio $\mathbb{R}^n$ tiene una sola estructura diferenciable; esta riqueza es propia de la dimensión cuatro.

2. El teorema de unicidad $n = 3$ en el espacio de dimensión cuatro

Teorema 2.1 (Teorema de unicidad $n = 3$ — teorema del parche hiperesférico 4D)

En $\mathbb{R}^4$, para una densidad de ley de potencias con simetría esférica $\rho(r) = r^{-n}$, la tasa de crecimiento de la masa de la cáscara hiperesférica tridimensional S_r^3 ,

$$\frac{dm^{(4)}}{dr} = \text{Vol}(S^3) \cdot r^{3-n} = 2\pi^2 r^{3-n}$$

es uniforme y constante en $(0, \infty)$ si y solo si $n = 3$. El valor constante es entonces el volumen de la 3-esfera $\text{Vol}(S^3) = 2\pi^2$.

Demostración.

El elemento de volumen en $\mathbb{R}^4$ es $dV = 2\pi^2 r^3 dr$. La masa de la cáscara es $dm = \rho(r)dV = 2\pi^2 r^{3-n} dr$. La condición necesaria y suficiente para que $dm/dr = 2\pi^2 r^{3-n}$ sea independiente de r es $3 - n = 0 \iff n = 3$, y entonces $dm/dr = 2\pi^2$.

Esto traslada el teorema 1 del Artículo 01 ($n = 2$ en tres dimensiones) a cuatro dimensiones.

3. Despliegue geométrico mediante la fibración de Hopf

Descomponemos el parche unitario de dimensión cuatro $2\pi^2$, fijado en la sección anterior, según la estructura de fibras de la fibración de Hopf. En esta sección **el radio R de la 3-esfera se trata como variable explícita**. Como veremos, convertir el radio en variable es la clave para reconocer qué es realmente $16\pi^2$.

Teorema 3.1 (Teorema de descomposición de Hopf)

Para la fibración de Hopf de la 3-esfera de radio R ,

$$S^1 \hookrightarrow S_R^3 \longrightarrow S_{R/2}^2$$

el producto del área de la base $S_{R/2}^2$ por la circunferencia de la fibra S^1 es igual al volumen del espacio total para todo $R > 0$:

$$\underbrace{\pi R^2}_{\text{área de la base}} \times \underbrace{2\pi R}_{\text{circunferencia de la fibra}} = 2\pi^2 R^3 = \text{Vol}(S_R^3)$$

Demostración.

En la fibración de Hopf, la 3-esfera de radio R tiene como base la 2-esfera de radio $R/2$. El área de la base es, por tanto,

$$4\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \pi R^2$$

y la fibra, al ser un círculo máximo de radio R , tiene circunferencia $2\pi R$. Su producto es

$$\pi R^2 \cdot 2\pi R = 2\pi^2 R^3$$

que es igual al volumen $\text{Vol}(S_R^3) = 2\pi^2 R^3$ de la 3-esfera de radio R .

Corolario 3.2 (El caso de radio unidad — el parche de masa 4D)

En $R = 1$, el teorema 3.1 da

$$2\pi^2 = \pi \times 2\pi$$

Es decir, el parche de masa $2\pi^2$ fijado por el teorema de unicidad $n = 3$ se despliega como el producto del área de la base π por la circunferencia de la fibra 2π .

Teorema 3.3 (Aparición doble del parche de Yamagishi en $R = 2$ — la identidad del capullo $16\pi^2$)

En $R = 2$, ambos factores de la descomposición de Hopf coinciden con el parche de Yamagishi 4π , y el volumen del espacio total es $16\pi^2$:

$$16\pi^2 = \text{Vol}(S^3_{R=2}) = \underbrace{4\pi}_{\text{ángulo sólido de la base } S^2_{R/2=1}} \times \underbrace{4\pi}_{\text{circunferencia de la fibra}}$$

Además, con la métrica estándar, $R = 2$ es el único radio en el que los valores numéricos de los dos factores coinciden.

Demostración.

Sustituyendo $R = 2$ en el teorema 3.1: el área de la base es $\pi \cdot 2^2 = 4\pi$, la circunferencia de la fibra es $2\pi \cdot 2 = 4\pi$, y el volumen total es $2\pi^2 \cdot 2^3 = 16\pi^2$.

Para la unicidad, resolvemos la condición de coincidencia

$$\pi R^2 = 2\pi R$$

para $R > 0$. Dividiendo ambos miembros por $\pi R (\neq 0)$ se obtiene $R = 2$.

3.1 El radio de coincidencia se desplaza con las unidades; el cociente de volúmenes, no

Las dos magnitudes comparadas en la coincidencia del teorema 3.3 difieren en dimensión: el área de la base πR^2 es $[L^2]$ y la circunferencia de la fibra $2\pi R$ es $[L]$. El radio en el que coinciden depende, por tanto, de la elección de la unidad de longitud; reescalar la unidad por un factor λ lo desplaza a

$$\pi(\lambda R)^2 = 2\pi(\lambda R) \implies R = \frac{2}{\lambda}$$

($R = 1$ para $\lambda = 2$; $R = 1/5$ para $\lambda = 10$). $R = 2$ es el radio elegido para que 4π aparezca dos veces. La disciplina de no igualar un área con una longitud es la que el Artículo 18 estableció para una identificación del mismo tipo (la circunferencia 2π de S^1 frente al ángulo sólido 4π).

En cambio, los tres puntos siguientes son dimensionalmente coherentes y valen independientemente de la elección de unidades.

- El teorema 3.1 (la descomposición de Hopf) en sí:** $[L^2] \times [L] = [L^3]$ es dimensionalmente coherente, y es consecuencia de la fórmula del volumen para una submersión riemanniana con fibras totalmente geodésicas.

- ii. $16\pi^2 = \text{Vol}(S_{R=2}^3)$: la aritmética $2\pi^2 \cdot 2^3$; $16\pi^2$ es el volumen de la 3-esfera de radio dos.
- iii. El cociente $2^3 = 8$ del corolario 3.4: un cociente entre magnitudes de la misma dimensión, y por tanto invariante de escala.

Corolario 3.4 (Cociente de volúmenes del capullo al parche)

Por el teorema 3.3 y el corolario 3.2, el cociente del capullo toroidal $16\pi^2$ al parche de masa $2\pi^2$ queda determinado rigurosamente como el reescalado del volumen que acompaña a una duplicación del radio:

$$\frac{C_{\text{Torus}}}{m^{(4)}} = \frac{\text{Vol}(S_{R=2}^3)}{\text{Vol}(S_{R=1}^3)} = \frac{16\pi^2}{2\pi^2} = 2^3 = 8$$

3.2 Significado geométrico

El teorema 3.3 dota a la magnitud $16\pi^2 = (4\pi)^2$, recurrente en todo este corpus, de una sustancia que va más allá de la multiplicación algebraica. Antes de ser «el ángulo sólido 4π multiplicado por sí mismo», $16\pi^2$ es **un único objeto geométrico: la 3-esfera de radio dos**, dentro de la cual la estructura de fibras de Hopf divide base y fibra en 4π cada una.

Tomando $R = 2$ con la métrica estándar, ambos factores de la descomposición de Hopf toman el valor numérico 4π , de modo que la descomposición $16\pi^2 = 4\pi \times 4\pi$ se realiza como una **descomposición geométrica efectiva**. Esto **proporciona un referente** a la lectura que el corpus hace de $16\pi^2$ como $4\pi \times 4\pi$ (la regla de módulo del Artículo 13). El orden es « R se elige para que aparezca 4π »; que $16\pi^2$ sea el volumen de la 3-esfera de radio dos vale independientemente de cómo se lea $R = 2$.

4. Interpretación geométrico-informacional del $\mathbb{R}^4$ exótico

Proposición 4.1 (Determinación del cociente de volúmenes)

El cociente entre la 3-esfera de radio uno $S_{R=1}^3$ (volumen $2\pi^2$) y la de radio dos $S_{R=2}^3$ (volumen $16\pi^2$) queda fijado por el corolario 3.4 como $2^3 = 8$.

Lo que este cociente compara son **dos 3-esferas**:

$$\frac{\text{Vol}(S_{R=2}^3)}{\text{Vol}(S_{R=1}^3)} = \frac{16\pi^2}{2\pi^2} = 8$$

Dividir $S^3_{R=2}$ (volumen $16\pi^2$) por S^2 (área 4π) da $16\pi^2/4\pi = 4\pi \approx 12.57$, pero ese es un cociente entre un volumen $[L^3]$ y un área $[L^2]$, y necesita una convención adicional para tener significado. El número que usa este artículo es el cociente 8 entre magnitudes de la misma dimensión.

Una lectura de las implicaciones topológicas

Lo que sigue es una **lectura** basada en los hechos establecidos arriba.

El hecho de que existan infinitos no numerables $\mathbb{R}^4$ exóticos solo en el espacio euclídeo de dimensión cuatro puede leerse, desde el punto de vista del OS del Universo, como un fenómeno en el que la libertad de conexión topológica se maximiza en la transformación de datos del parche de renderizado 3D 4π al capullo protector 4D $16\pi^2$. La imagen es la de un protocolo interno de disposición de datos (la estructura diferenciable) que puede ramificarse aun siendo topológicamente un único $\mathbb{R}^4$.

Si existe una correspondencia rigurosa entre la realizabilidad de las formas de intersección en la teoría de Donaldson y el reescalado de volúmenes de este artículo es una **tarea para el futuro**. Esta sección señala la posibilidad de una correspondencia estructural entre ambos.

En el lado de la física también hay trabajos en la dirección opuesta: Król y Asselmeyer-Maluga (2025), argumentando desde la gravedad cuántica, sugieren que 4-esferas suaves exóticas actúan como instantones gravitacionales y que la conjetura de Poincaré suave en dimensión cuatro quedaría así negada. Este artículo no toma ese camino; trata la conjetura de Poincaré suave en dimensión cuatro como abierta y lee estructuralmente resultados establecidos.

5. Conclusión

Este artículo ha mostrado lo siguiente.

1. Mediante el teorema de unicidad $n = 3$, el parche de masa hipersférico de dimensión cuatro queda fijado de manera única como $m^{(4)} = \text{Vol}(S^3) = 2\pi^2$ (teorema 2.1).
2. Mediante la descomposición de Hopf, para todo radio R el producto del área de la base πR^2 por la circunferencia de la fibra $2\pi R$ es igual al volumen del espacio total $2\pi^2 R^3$ (teorema 3.1).
3. En $R = 2$ ambos factores toman el valor numérico 4π , lo que fija el capullo toroidal $16\pi^2$ como **un único objeto geométrico: la 3-esfera de radio dos** (teorema 3.3). El radio de coincidencia se desplaza con la unidad de longitud; lo que no depende de las unidades es el cociente de volúmenes $2^3 = 8$ (corolario 3.4).
4. La relación con el $\mathbb{R}^4$ exótico se ha presentado manteniendo separados el hecho geométrico establecido y la lectura construida sobre él (sección 4).

Antes de ser 4π tomado dos veces, $16\pi^2$ es el volumen de la 3-esfera de radio dos. Dentro de ella, la estructura de fibras de Hopf divide base y fibra en 4π cada una; las unidades deciden en qué radio se muestra esa división, y solo el factor 8, que

acompaña a la duplicación del radio, no elige unidades.

Registro de revisiones

Cuarta edición (septiembre de 2026): la forma se ajustó a la plantilla actual (una nota de alcance justo después del resumen, el registro de revisiones trasladado del principio a justo antes de las referencias, y la «declaración de alcance» final reunida en la nota de alcance). En el título, «Elucidación topológica» pasó a ser «Una interpretación estructural». En la sección 1.2 se corrigió la atribución de la no numerabilidad de los $\mathbb{R}^4$ exóticos (la familia infinita se debe a Gompf, la no numerabilidad a Taubes). En la sección 4 se cita a Król y Asselmeyer-Maluga (2025) como trabajo relacionado.

Tercera edición (julio de 2026): se eliminó la lectura de $R = 2$ en el teorema 3.3 como radio crítico de equilibrio geométrico, y la diferencia de dimensión entre un área y una longitud quedó escrita en la sección 3. Se corrigieron los objetos del cociente citado en la proposición 4.1.

Segunda edición (julio de 2026): la descomposición de Hopf se reformuló en forma general con el radio R como variable explícita (teorema 3.1), y $16\pi^2$ se identificó como el volumen de la 3-esfera de radio dos (teorema 3.3). En la sección 4 se separaron el hecho algebraico establecido y la lectura topológica.

Referencias

1. Freedman, M. H. (1982). *The topology of four-dimensional manifolds*. Journal of Differential Geometry.
2. Donaldson, S. K. (1983). *An application of gauge theory to four-dimensional topology*. Journal of Differential Geometry.
3. Gompf, R. E. (1983). *Three exotic $\mathbb{R}^4$'s and other anomalies*. Journal of Differential Geometry.
4. Gompf, R. E. (1985). *An infinite set of exotic $\mathbb{R}^4$'s*. Journal of Differential Geometry.
5. Taubes, C. H. (1987). *Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds*. Journal of Differential Geometry.
6. Hopf, H. (1931). *Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche*. Mathematische Annalen.
7. Yamagishi, Y. (2026). *The Uniqueness Theorem of $n = 2$ for Spherically Symmetric Density Distributions* [Artículo 01]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186
8. Yamagishi, Y. (2026). *Physical Law as a Description Language of the Universe OS* [Artículo 13]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404917
9. Yamagishi, Y. (2026). *The Yamagishi Kinetic Energy Equation* [Artículo 18]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21430706
10. Król, J., & Asselmeyer-Maluga, T. (2025). *Negation of the Smooth Poincare Conjecture in Dimension 4 and Negation of the Tsirelson's Conjecture Shed Light on Quantum Gravity*. Universe.

— *From thinking to syncing.* —

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Bajo licencia Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)