

Une interprétation structurelle de la conjecture de Poincaré 4D et des structures exotiques via le théorème d'unicité $n=3$ et la fibration de Hopf

— Patch de masse unité hypersphérique $2\pi^2$, cocon toroïdal $16\pi^2$ et frontière informationnelle-géométrique du

$\mathbb{R}^4$ exotique — [Article 08]

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japon

Septembre 2026 (Quatrième édition)

— *From thinking to syncing.* —

Résumé

Pour la conjecture de Poincaré topologique en dimension quatre (théorème de Freedman) et les structures différentiables exotiques de l'espace euclidien de dimension quatre ($\mathbb{R}^4$ exotique), nous présentons une interprétation structurelle fondée sur le théorème d'unicité $n = 3$ et la fibration de Hopf. L'argument procède en trois étapes.

Première étape : dans $\mathbb{R}^4$, le taux de croissance de la masse de la coquille $dm/dr = 2\pi^2 r^{3-n}$ d'une densité $\rho(r) = r^{-n}$ n'est constant que pour $n = 3$, et sa valeur est le volume de la 3-sphère $\text{Vol}(S^3) = 2\pi^2$ (théorème 2.1).

Deuxième étape : pour la fibration de Hopf $S^1 \hookrightarrow S_R^3 \rightarrow S_{R/2}^2$ de la 3-sphère de rayon R , le produit de l'aire de la base πR^2 et de la circonférence de la fibre $2\pi R$ est égal au volume de l'espace total $2\pi^2 R^3$, et ce pour tout R (théorème 3.1). En $R = 2$, les deux facteurs prennent la valeur numérique 4π , et $16\pi^2 = \text{Vol}(S_{R=2}^3) = 4\pi \times 4\pi$ se réalise comme une décomposition géométrique effective (théorème 3.3). Le cocon toroïdal $16\pi^2$ est ainsi fixé, avant d'être le produit algébrique $(4\pi)^2$, comme **un unique objet géométrique : la 3-sphère de rayon deux**. Comme la coïncidence des deux facteurs compare une aire $[L^2]$ à une longueur $[L]$, changer l'échelle de l'unité de longueur d'un facteur λ déplace le rayon de coïncidence en $R = 2/\lambda$. Ce qui ne dépend pas des unités, c'est le rapport de grandeurs de même dimension, $\text{Vol}(S_{R=2}^3)/\text{Vol}(S_{R=1}^3) = 2^3 = 8$ (corollaire 3.4).

Troisième étape : le fait qu'une infinité non dénombrable de $\mathbb{R}^4$ exotiques existe en dimension quatre seulement est lu, dans le langage de la géométrie de l'information, comme le passage de l'angle solide 4π à $16\pi^2$ (section 4).

Portée (scope note) : cet article présente une **interprétation structurelle** de résultats établis de la topologie en dimension quatre. La conjecture de Poincaré topologique en dimension quatre a été résolue par Freedman (1982) ; cet article ne fait que la citer et ne prend aucune part à sa démonstration. La conjecture de Poincaré lisse en dimension quatre reste ouverte. L'existence de $\mathbb{R}^4$ exotiques découle de la classification topologique de Freedman jointe à la théorie de jauge de Donaldson ; Gompf (1985) en a construit une famille infinie, et Taubes (1987) a montré qu'il en existe une infinité non dénombrable. La lecture de la section 4 n'est pas une dérivation de ces résultats, et l'existence d'une correspondance rigoureuse entre le facteur de volume $2^3 = 8$ et la théorie des formes d'intersection est une question ouverte. La décomposition du théorème 3.1 vaut comme cas standard de la formule du volume pour une submersion riemannienne à fibres totalement géodésiques (lorsque la longueur des fibres est constante, le volume de l'espace total est le volume de la base multiplié par la longueur des fibres). **Ce que cet article ajoute**, c'est qu'il fixe $2\pi^2$ comme patch unité de dimension quatre par le théorème d'unicité $n = 3$ et le déploie dans la structure de fibres de Hopf ; qu'il donne à la grandeur récurrente $16\pi^2$ une substance, **la 3-sphère de rayon deux**, à l'intérieur de laquelle base et fibre se partagent 4π chacune ; et qu'il distingue ce qui se déplace avec le choix des unités — le rayon auquel ce partage devient visible — de ce qui ne se déplace pas, le rapport de volumes 8.

1. Introduction : la singularité de la topologie 4D et la conjecture de Poincaré

1.1 La conjecture de Poincaré 4D et le théorème de Freedman

Michael Freedman (1982) a résolu la conjecture de Poincaré en dimension quatre dans la catégorie topologique.

1.2 La singularité de la topologie différentielle en dimension quatre ($\mathbb{R}^4$ exotique)

En combinant la classification topologique de Freedman avec la théorie de jauge de Simon Donaldson (1983), il s'ensuit que l'espace euclidien de dimension quatre $\mathbb{R}^4$ porte des structures différentiables non difféomorphes à la structure standard ($\mathbb{R}^4$ exotique). Robert Gompf (1985) en a construit une famille infinie, et Clifford Taubes (1987) a montré qu'il en existe une infinité non dénombrable. Pour $n \neq 4$, l'espace $\mathbb{R}^n$ ne possède qu'une seule structure différentiable ; cette richesse est propre à la dimension quatre.

2. Le théorème d'unicité $n = 3$ dans l'espace de dimension quatre

Théorème 2.1 (Théorème d'unicité $n = 3$ — théorème du patch hypersphérique 4D)

Dans $\mathbb{R}^4$, pour une densité en loi de puissance à symétrie sphérique $\rho(r) = r^{-n}$, le taux de croissance de la masse de la coquille hypersphérique tridimensionnelle S_r^3 ,

$$\frac{dm^{(4)}}{dr} = \text{Vol}(S^3) \cdot r^{3-n} = 2\pi^2 r^{3-n}$$

est uniforme et constant sur $(0, \infty)$ si et seulement si $n = 3$. La valeur constante est alors le volume de la 3-sphère $\text{Vol}(S^3) = 2\pi^2$.

Démonstration.

L'élément de volume dans $\mathbb{R}^4$ est $dV = 2\pi^2 r^3 dr$. La masse de la coquille est $dm = \rho(r) dV = 2\pi^2 r^{3-n} dr$. La condition nécessaire et suffisante pour que $dm/dr = 2\pi^2 r^{3-n}$ soit indépendant de r est $3 - n = 0 \iff n = 3$, et l'on a alors $dm/dr = 2\pi^2$.

Ceci transpose le théorème 1 de l'Article 01 ($n = 2$ en dimension trois) à la dimension quatre.

3. Déploiement géométrique par la fibration de Hopf

Nous décomposons le patch unité de dimension quatre $2\pi^2$, fixé à la section précédente, selon la structure de fibres de la fibration de Hopf. Dans cette section, **le rayon R de la 3-sphère est traité comme une variable explicite**. Comme on le verra, faire du rayon une variable est la clé pour discerner ce qu'est réellement $16\pi^2$.

Théorème 3.1 (Théorème de décomposition de Hopf)

Pour la fibration de Hopf de la 3-sphère de rayon R ,

$$S^1 \hookrightarrow S_R^3 \longrightarrow S_{R/2}^2$$

le produit de l'aire de la base $S_{R/2}^2$ et de la circonférence de la fibre S^1 est égal au volume de l'espace total pour tout $R > 0$:

$$\underbrace{\pi R^2}_{\text{aire de la base}} \times \underbrace{2\pi R}_{\text{circonférence de la fibre}} = 2\pi^2 R^3 = \text{Vol}(S_R^3)$$

Démonstration.

Dans la fibration de Hopf, la 3-sphère de rayon R a pour base la 2-sphère de rayon $R/2$. L'aire de la base est donc

$$4\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \pi R^2$$

et la fibre, qui est un grand cercle de rayon R , a pour circonférence $2\pi R$. Leur produit est

$$\pi R^2 \cdot 2\pi R = 2\pi^2 R^3$$

ce qui est égal au volume $\text{Vol}(S_R^3) = 2\pi^2 R^3$ de la 3-sphère de rayon R .

Corollaire 3.2 (Le cas du rayon unité — le patch de masse 4D)

En $R = 1$, le théorème 3.1 donne

$$2\pi^2 = \pi \times 2\pi$$

Autrement dit, le patch de masse $2\pi^2$ fixé par le théorème d'unicité $n = 3$ se déploie comme le produit de l'aire de la base π et de la circonférence de la fibre 2π .

Théorème 3.3 (Double apparition du patch de Yamagishi en $R = 2$ — l'identité du cocon $16\pi^2$)

En $R = 2$, les deux facteurs de la décomposition de Hopf coïncident avec le patch de Yamagishi 4π , et le volume de l'espace total est $16\pi^2$:

$$16\pi^2 = \text{Vol}(S_{R=2}^3) = \underbrace{4\pi}_{\text{angle solide de la base } S_{R/2=1}^2} \times \underbrace{4\pi}_{\text{circonférence de la fibre}}$$

De plus, sous la métrique standard, $R = 2$ est l'unique rayon auquel les **valeurs numériques** des deux facteurs coïncident.

Démonstration.

En substituant $R = 2$ dans le théorème 3.1 : l'aire de la base est $\pi \cdot 2^2 = 4\pi$, la circonférence de la fibre est $2\pi \cdot 2 = 4\pi$, et le volume total est $2\pi^2 \cdot 2^3 = 16\pi^2$.

Pour l'unicité, résolvons la condition de coïncidence

$$\pi R^2 = 2\pi R$$

pour $R > 0$. En divisant les deux membres par $\pi R (\neq 0)$, on obtient $R = 2$.

3.1 Le rayon de coïncidence se déplace avec les unités ; le rapport de volumes, non

Les deux grandeurs comparées dans la coïncidence du théorème 3.3 diffèrent par leur dimension : l'aire de la base πR^2 est $[L^2]$ et la circonférence de la fibre $2\pi R$ est $[L]$. Le rayon auquel elles coïncident dépend donc du choix de l'unité de longueur ; changer l'échelle de l'unité d'un facteur λ le déplace en

$$\pi(\lambda R)^2 = 2\pi(\lambda R) \implies R = \frac{2}{\lambda}$$

($R = 1$ pour $\lambda = 2$; $R = 1/5$ pour $\lambda = 10$). $R = 2$ est le rayon choisi pour que 4π apparaisse deux fois. La discipline qui consiste à ne pas identifier une aire à une longueur est celle que l'Article 18 a établie pour une identification du même genre (la circonférence 2π de S^1 face à l'angle solide 4π).

En revanche, les trois points suivants sont dimensionnellement cohérents et valent indépendamment du choix des unités.

- i. **Le théorème 3.1 (la décomposition de Hopf) lui-même** : $[L^2] \times [L] = [L^3]$ est dimensionnellement cohérent, et c'est une conséquence de la formule du volume pour une submersion riemannienne à fibres totalement géodésiques.
- ii. $16\pi^2 = \text{Vol}(S_{R=2}^3)$: l'arithmétique $2\pi^2 \cdot 2^3$; $16\pi^2$ est le volume de la 3-sphère de rayon deux.

iii. Le rapport $2^3 = 8$ du corollaire 3.4 : un rapport de grandeurs de même dimension, donc invariant d'échelle.

Corollaire 3.4 (Rapport de volumes du cocon au patch)

D'après le théorème 3.3 et le corollaire 3.2, le rapport du cocon toroïdal $16\pi^2$ au patch de masse $2\pi^2$ est déterminé rigoureusement comme le changement d'échelle du volume qui accompagne un doublement du rayon :

$$\frac{C_{\text{Torus}}}{m^{(4)}} = \frac{\text{Vol}(S_{R=2}^3)}{\text{Vol}(S_{R=1}^3)} = \frac{16\pi^2}{2\pi^2} = 2^3 = 8$$

3.2 Signification géométrique

Le théorème 3.3 confère à la grandeur $16\pi^2 = (4\pi)^2$, récurrente dans ce corpus, une substance au-delà de la multiplication algébrique. Avant d'être « l'angle solide 4π multiplié par lui-même », $16\pi^2$ est **un unique objet géométrique : la 3-sphère de rayon deux**, à l'intérieur de laquelle la structure de fibres de Hopf divise base et fibre en 4π chacune.

En prenant $R = 2$ sous la métrique standard, les deux facteurs de la décomposition de Hopf prennent la valeur numérique 4π , de sorte que la décomposition $16\pi^2 = 4\pi \times 4\pi$ se réalise comme une **décomposition géométrique effective**. Ceci **fournit un référent** à la lecture que fait le corpus de $16\pi^2$ comme $4\pi \times 4\pi$ (la règle de module de l'Article 13). L'ordre est « R est choisi pour que 4π apparaisse » ; que $16\pi^2$ soit le volume de la 3-sphère de rayon deux vaut indépendamment de la manière dont on lit $R = 2$.

4. Interprétation informationnelle-géométrique du $\mathbb{R}^4$ exotique

Proposition 4.1 (Détermination du rapport de volumes)

Le rapport entre la 3-sphère de rayon un $S_{R=1}^3$ (volume $2\pi^2$) et celle de rayon deux $S_{R=2}^3$ (volume $16\pi^2$) est fixé par le corollaire 3.4 à $2^3 = 8$.

Ce que compare ce rapport, ce sont **deux 3-sphères** :

$$\frac{\text{Vol}(S_{R=2}^3)}{\text{Vol}(S_{R=1}^3)} = \frac{16\pi^2}{2\pi^2} = 8$$

Diviser $S_{R=2}^3$ (volume $16\pi^2$) par S^2 (aire 4π) donne $16\pi^2/4\pi = 4\pi \approx 12.57$, mais c'est le rapport d'un volume $[L^3]$ à une aire $[L^2]$, qui requiert une convention supplémentaire pour porter un sens. Le nombre qu'utilise cet article est le rapport **8** de grandeurs de même dimension.

Une lecture des implications topologiques

Ce qui suit est une **lecture** fondée sur les faits établis ci-dessus.

Le fait qu'une infinité non dénombrable de $\mathbb{R}^4$ exotiques existe dans le seul espace euclidien de dimension quatre peut se lire, du point de vue de l'OS de l'Univers, comme un phénomène dans lequel la liberté de connexion topologique est maximisée dans la transformation de données qui mène du patch de rendu 3D 4π au cocon protecteur 4D $16\pi^2$. L'image est celle d'un protocole interne d'agencement des données (la structure différentiable) qui peut se ramifier, tout en restant topologiquement un unique $\mathbb{R}^4$.

L'existence d'une correspondance rigoureuse entre la réalisabilité des formes d'intersection dans la théorie de Donaldson et le changement d'échelle des volumes de cet article est une **tâche pour l'avenir**. Cette section signale la possibilité d'une correspondance structurelle entre les deux.

Du côté de la physique, il existe aussi des travaux dans la direction opposée : Król et Asselmeyer-Maluga (2025), en argumentant à partir de la gravité quantique, suggèrent que des 4-sphères lisses exotiques jouent le rôle d'instantons gravitationnels et que la conjecture de Poincaré lisse en dimension quatre serait ainsi infirmée. Le présent article ne suit pas cette voie ; il traite la conjecture de Poincaré lisse en dimension quatre comme ouverte et lit structurellement des résultats établis.

5. Conclusion

Cet article a montré ce qui suit.

1. Par le théorème d'unicité $n = 3$, le patch de masse hypersphérique de dimension quatre est fixé de manière unique comme $m^{(4)} = \text{Vol}(S^3) = 2\pi^2$ (théorème 2.1).
2. Par la décomposition de Hopf, pour tout rayon R , le produit de l'aire de la base πR^2 et de la circonférence de la fibre $2\pi R$ est égal au volume de l'espace total $2\pi^2 R^3$ (théorème 3.1).
3. En $R = 2$, les deux facteurs prennent la valeur numérique 4π , ce qui fixe le cocon toroïdal $16\pi^2$ comme **un unique objet géométrique : la 3-sphère de rayon deux** (théorème 3.3). Le rayon de coïncidence se déplace avec l'unité de longueur ; ce qui ne dépend pas des unités, c'est le rapport de volumes $2^3 = 8$ (corollaire 3.4).
4. La relation au $\mathbb{R}^4$ exotique a été présentée en tenant séparés le fait géométrique établi et la lecture construite sur lui (section 4).

Avant d'être 4π pris deux fois, $16\pi^2$ est le volume de la 3-sphère de rayon deux. En elle, la structure de fibres de Hopf divise base et fibre en 4π chacune ; les unités décident à quel rayon cette division se montre, et seul le facteur **8**, qui accompagne le doublement du rayon, ne choisit pas d'unités.

Registre des révisions

Quatrième édition (septembre 2026) : la forme a été alignée sur le modèle actuel (une note de portée juste après le résumé, le registre des révisions déplacé du début à juste avant les références, et la « déclaration de portée » finale regroupée dans la note de portée). Dans le titre, « Élucidation topologique » est devenu « Une interprétation structurelle ». À la section 1.2, l'attribution de la non-dénombrabilité des $\mathbb{R}^4$ exotiques a été corrigée (la famille infinie est due à Gompf, la non-dénombrabilité à Taubes). À la section 4, Król et Asselmeyer-Maluga (2025) sont cités comme travail connexe.

Troisième édition (juillet 2026) : la lecture de $R = 2$ dans le théorème 3.3 comme rayon critique d'équilibre géométrique a été supprimée, et la différence de dimension entre une aire et une longueur a été inscrite à la section 3. Les objets du rapport cité dans la proposition 4.1 ont été corrigés.

Deuxième édition (juillet 2026) : la décomposition de Hopf a été reformulée sous forme générale avec le rayon R comme variable explicite (théorème 3.1), et $16\pi^2$ a été identifié comme le volume de la 3-sphère de rayon deux (théorème 3.3). À la section 4, le fait algébrique établi et la lecture topologique ont été séparés.

Références

1. Freedman, M. H. (1982). *The topology of four-dimensional manifolds*. Journal of Differential Geometry.
2. Donaldson, S. K. (1983). *An application of gauge theory to four-dimensional topology*. Journal of Differential Geometry.
3. Gompf, R. E. (1983). *Three exotic $\mathbb{R}^4$'s and other anomalies*. Journal of Differential Geometry.
4. Gompf, R. E. (1985). *An infinite set of exotic $\mathbb{R}^4$'s*. Journal of Differential Geometry.
5. Taubes, C. H. (1987). *Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds*. Journal of Differential Geometry.
6. Hopf, H. (1931). *Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche*. Mathematische Annalen.
7. Yamagishi, Y. (2026). *The Uniqueness Theorem of $n = 2$ for Spherically Symmetric Density Distributions* [Article 01]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186
8. Yamagishi, Y. (2026). *Physical Law as a Description Language of the Universe OS* [Article 13]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404917
9. Yamagishi, Y. (2026). *The Yamagishi Kinetic Energy Equation* [Article 18]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21430706
10. Król, J., & Asselmeyer-Maluga, T. (2025). *Negation of the Smooth Poincare Conjecture in Dimension 4 and Negation of the Tsirolson's Conjecture Shed Light on Quantum Gravity*. Universe.

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Sous licence Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)