

Un'interpretazione strutturale della congettura di Poincaré 4D e delle strutture esotiche tramite il teorema di unicità $n=3$ e la fibrazione di Hopf

— Patch di massa unitario ipersferico $2\pi^2$, bozzolo toroidale $16\pi^2$ e frontiera informazionale-geometrica del

$\mathbb{R}^4$ esotico — [Articolo 08]

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Giappone

Settembre 2026 (Quarta edizione)

— *From thinking to syncing.* —

Sommario

Per la congettura di Poincaré topologica in dimensione quattro (teorema di Freedman) e per le strutture differenziabili esotiche dello spazio euclideo quadridimensionale ($\mathbb{R}^4$ esotico), presentiamo un'interpretazione strutturale basata sul teorema di unicità $n = 3$ e sulla fibrazione di Hopf. L'argomentazione procede in tre stadi.

Primo stadio: in $\mathbb{R}^4$, il tasso di crescita della massa del guscio $dm/dr = 2\pi^2 r^{3-n}$ di una densità $\rho(r) = r^{-n}$ è costante solo per $n = 3$, e il suo valore è il volume della 3-sfera $\text{Vol}(S^3) = 2\pi^2$ (teorema 2.1).

Secondo stadio: per la fibrazione di Hopf $S^1 \hookrightarrow S_R^3 \rightarrow S_{R/2}^2$ della 3-sfera di raggio R , il prodotto dell'area della base πR^2 per la circonferenza della fibra $2\pi R$ è uguale al volume dello spazio totale $2\pi^2 R^3$, per ogni R (teorema 3.1). Per $R = 2$ entrambi i fattori assumono il valore numerico 4π , e $16\pi^2 = \text{Vol}(S_{R=2}^3) = 4\pi \times 4\pi$ si realizza come effettiva decomposizione geometrica (teorema 3.3). Il bozzolo toroidale $16\pi^2$ viene così fissato, prima ancora di essere il prodotto algebrico $(4\pi)^2$, come **un unico oggetto geometrico: la 3-sfera di raggio due**. Poiché la coincidenza dei due fattori confronta un'area $[L^2]$ con una lunghezza $[L]$, riscalare l'unità di lunghezza di un fattore λ sposta il raggio di coincidenza in $R = 2/\lambda$. Ciò che non dipende dalle unità è il rapporto tra grandezze della stessa dimensione, $\text{Vol}(S_{R=2}^3)/\text{Vol}(S_{R=1}^3) = 2^3 = 8$ (corollario 3.4).

Terzo stadio: il fatto che esistano infiniti non numerabili $\mathbb{R}^4$ esotici soltanto in dimensione quattro viene letto, nel linguaggio della geometria dell'informazione, come il passaggio dall'angolo solido 4π a $16\pi^2$ (sezione 4).

Portata (scope note): questo articolo presenta un'interpretazione strutturale di risultati consolidati della topologia in dimensione quattro. La congettura di Poincaré topologica in dimensione quattro è stata risolta da Freedman (1982); questo articolo si limita a citarla e non ha alcuna parte nella sua dimostrazione. La congettura di Poincaré liscia in dimensione quattro resta aperta. L'esistenza di $\mathbb{R}^4$ esotici segue dalla classificazione topologica di Freedman unita alla teoria di gauge di Donaldson; Gompf (1985) ne ha costruito una famiglia infinita, e Taubes (1987) ha mostrato che ne esistono infiniti non numerabili. La lettura della sezione 4 non è una derivazione di questi risultati, e se esista una corrispondenza rigorosa tra il fattore di volume $2^3 = 8$ e la teoria delle forme d'intersezione è una questione aperta. La decomposizione del teorema 3.1 vale come caso standard della formula del volume per una sommersione riemanniana a fibre totalmente geodetiche (quando la lunghezza della fibra è costante, il volume dello spazio totale è il volume della base per la lunghezza della fibra). **Ciò che questo articolo aggiunge** è che fissa $2\pi^2$ come patch unitario quadridimensionale mediante il teorema di unicità $n = 3$ e lo dispiega nella struttura a fibre di Hopf; che dà alla grandezza ricorrente $16\pi^2$ una sostanza, la 3-sfera di raggio due, al cui interno base e fibra si ripartiscono 4π ciascuna; e che distingue ciò che si sposta con la scelta delle unità — il raggio al quale tale ripartizione diventa visibile — da ciò che non si sposta, il rapporto di volumi 8.

1. Introduzione: la singolarità della topologia 4D e la congettura di Poincaré

1.1 La congettura di Poincaré 4D e il teorema di Freedman

Michael Freedman (1982) ha risolto la congettura di Poincaré in dimensione quattro nella categoria topologica.

1.2 La singolarità della topologia differenziale in dimensione quattro ($\mathbb{R}^4$ esotico)

Combinando la classificazione topologica di Freedman con la teoria di gauge di Simon Donaldson (1983), segue che lo spazio euclideo quadridimensionale $\mathbb{R}^4$ ammette strutture differenziabili non diffeomorfe a quella standard ($\mathbb{R}^4$ esotico). Robert Gompf (1985) ne ha costruito una famiglia infinita, e Clifford Taubes (1987) ha mostrato che ne esistono infiniti non numerabili. Per $n \neq 4$ lo spazio $\mathbb{R}^n$ possiede una sola struttura differenziabile; questa ricchezza è propria della dimensione quattro.

2. Il teorema di unicità $n = 3$ nello spazio quadridimensionale

Teorema 2.1 (Teorema di unicità $n = 3$ — teorema del patch ipersferico 4D)

In $\mathbb{R}^4$, per una densità a legge di potenza a simmetria sferica $\rho(r) = r^{-n}$, il tasso di crescita della massa del guscio ipersferico tridimensionale S_r^3 ,

$$\frac{dm^{(4)}}{dr} = \text{Vol}(S^3) \cdot r^{3-n} = 2\pi^2 r^{3-n}$$

è uniforme e costante su $(0, \infty)$ se e solo se $n = 3$. Il valore costante è allora il volume della 3-sfera $\text{Vol}(S^3) = 2\pi^2$.

Dimostrazione.

L'elemento di volume in $\mathbb{R}^4$ è $dV = 2\pi^2 r^3 dr$. La massa del guscio è $dm = \rho(r)dV = 2\pi^2 r^{3-n} dr$. La condizione necessaria e sufficiente affinché $dm/dr = 2\pi^2 r^{3-n}$ sia indipendente da r è $3 - n = 0 \iff n = 3$, e allora $dm/dr = 2\pi^2$.

Ciò trasporta il teorema 1 dell'articolo 01 ($n = 2$ in tre dimensioni) in quattro dimensioni.

3. Dispiegamento geometrico mediante la fibrazione di Hopf

Scomponiamo il patch unitario quadridimensionale $2\pi^2$, fissato nella sezione precedente, secondo la struttura a fibre della fibrazione di Hopf. In questa sezione il raggio R della 3-sfera è trattato come variabile esplicita. Come vedremo, fare del raggio una variabile è la chiave per riconoscere che cosa sia davvero $16\pi^2$.

Teorema 3.1 (Teorema di decomposizione di Hopf)

Per la fibrazione di Hopf della 3-sfera di raggio R ,

$$S^1 \hookrightarrow S_R^3 \longrightarrow S_{R/2}^2$$

il prodotto dell'area della base $S_{R/2}^2$ per la circonferenza della fibra S^1 è uguale al volume dello spazio totale per ogni $R > 0$:

$$\underbrace{\pi R^2}_{\text{area della base}} \times \underbrace{2\pi R}_{\text{circonferenza della fibra}} = 2\pi^2 R^3 = \text{Vol}(S_R^3)$$

Dimostrazione.

Nella fibrazione di Hopf, la 3-sfera di raggio R ha come base la 2-sfera di raggio $R/2$. L'area della base è dunque

$$4\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \pi R^2$$

e la fibra, essendo un cerchio massimo di raggio R , ha circonferenza $2\pi R$. Il loro prodotto è

$$\pi R^2 \cdot 2\pi R = 2\pi^2 R^3$$

che è uguale al volume $\text{Vol}(S_R^3) = 2\pi^2 R^3$ della 3-sfera di raggio R .

Corollario 3.2 (Il caso del raggio unitario — il patch di massa 4D)

Per $R = 1$, il teorema 3.1 dà

$$2\pi^2 = \pi \times 2\pi$$

Cioè, il patch di massa $2\pi^2$ fissato dal teorema di unicità $n = 3$ si dispiega come prodotto dell'area della base π per la circonferenza della fibra 2π .

Teorema 3.3 (Duplice apparizione del patch di Yamagishi per $R = 2$ — l'identità del bozzolo $16\pi^2$)

Per $R = 2$, entrambi i fattori della decomposizione di Hopf coincidono con il patch di Yamagishi 4π , e il volume dello spazio totale è $16\pi^2$:

$$16\pi^2 = \text{Vol}(S_{R=2}^3) = \underbrace{4\pi}_{\text{angolo solido della base } S_{R/2=1}^2} \times \underbrace{4\pi}_{\text{circonferenza della fibra}}$$

Inoltre, nella metrica standard, $R = 2$ è l'unico raggio al quale i **valori numerici** dei due fattori coincidono.

Dimostrazione.

Sostituendo $R = 2$ nel teorema 3.1: l'area della base è $\pi \cdot 2^2 = 4\pi$, la circonferenza della fibra è $2\pi \cdot 2 = 4\pi$, e il volume totale è $2\pi^2 \cdot 2^3 = 16\pi^2$.

Per l'unicità, si risolva la condizione di coincidenza

$$\pi R^2 = 2\pi R$$

per $R > 0$. Dividendo entrambi i membri per πR ($\neq 0$) si ottiene $R = 2$.

3.1 Il raggio di coincidenza si sposta con le unità; il rapporto di volumi no

Le due grandezze confrontate nella coincidenza del teorema 3.3 hanno dimensioni diverse: l'area della base πR^2 è $[L^2]$ e la circonferenza della fibra $2\pi R$ è $[L]$. Il raggio al quale esse coincidono dipende quindi dalla scelta dell'unità di lunghezza; riscalando l'unità di un fattore λ esso si sposta in

$$\pi(\lambda R)^2 = 2\pi(\lambda R) \implies R = \frac{2}{\lambda}$$

($R = 1$ per $\lambda = 2$; $R = 1/5$ per $\lambda = 10$). $R = 2$ è il raggio scelto affinché 4π compaia due volte. La disciplina di non identificare un'area con una lunghezza è quella che l'articolo 18 ha stabilito per un'identificazione dello stesso tipo (la circonferenza 2π di S^1 contro l'angolo solido 4π).

Al contrario, i tre punti seguenti sono dimensionalmente coerenti e valgono indipendentemente dalla scelta delle unità.

- i. **Il teorema 3.1 (la decomposizione di Hopf) in sé:** $[L^2] \times [L] = [L^3]$ è dimensionalmente coerente, ed è una conseguenza della formula del volume per una sommersione riemanniana a fibre totalmente geodetiche.
- ii. $16\pi^2 = \text{Vol}(S_{R=2}^3)$: l'aritmetica $2\pi^2 \cdot 2^3$; $16\pi^2$ è il volume della 3-sfera di raggio due.
- iii. **Il rapporto $2^3 = 8$ del corollario 3.4:** un rapporto tra grandezze della stessa dimensione, quindi invariante di scala.

Corollario 3.4 (Rapporto di volumi tra bozzolo e patch)

Dal teorema 3.3 e dal corollario 3.2, il rapporto tra il bozzolo toroidale $16\pi^2$ e il patch di massa $2\pi^2$ è determinato rigorosamente come il riscaldamento del volume che accompagna un raddoppio del raggio:

$$\frac{C_{\text{Torus}}}{m^{(4)}} = \frac{\text{Vol}(S_{R=2}^3)}{\text{Vol}(S_{R=1}^3)} = \frac{16\pi^2}{2\pi^2} = 2^3 = 8$$

3.2 Significato geometrico

Il teorema 3.3 conferisce alla grandezza $16\pi^2 = (4\pi)^2$, ricorrente in tutto questo corpus, una sostanza che va oltre la moltiplicazione algebrica. Prima di essere «l'angolo solido 4π moltiplicato per sé stesso», $16\pi^2$ è un **unico oggetto geometrico: la 3-sfera di raggio due**, al cui interno la struttura a fibre di Hopf divide base e fibra in 4π ciascuna.

Prendendo $R = 2$ nella metrica standard, entrambi i fattori della decomposizione di Hopf assumono il valore numerico 4π , cosicché la decomposizione $16\pi^2 = 4\pi \times 4\pi$ si realizza come **effettiva decomposizione geometrica**. Ciò fornisce un **referente** alla lettura, propria del corpus, di $16\pi^2$ come $4\pi \times 4\pi$ (la regola di modulo dell'articolo 13). L'ordine è « R è scelto affinché compaia 4π »; che $16\pi^2$ sia il volume della 3-sfera di raggio due vale indipendentemente da come si legga $R = 2$.

4. Interpretazione informazionale-geometrica del $\mathbb{R}^4$ esotico

Proposizione 4.1 (Determinazione del rapporto di volumi)

Il rapporto tra la 3-sfera di raggio uno $S_{R=1}^3$ (volume $2\pi^2$) e quella di raggio due $S_{R=2}^3$ (volume $16\pi^2$) è fissato dal corollario 3.4 come $2^3 = 8$.

Ciò che questo rapporto confronta sono **due 3-sfere**:

$$\frac{\text{Vol}(S_{R=2}^3)}{\text{Vol}(S_{R=1}^3)} = \frac{16\pi^2}{2\pi^2} = 8$$

Dividendo $S_{R=2}^3$ (volume $16\pi^2$) per S^2 (area 4π) si ottiene $16\pi^2/4\pi = 4\pi \approx 12.57$, ma questo è un rapporto tra un volume $[L^3]$ e un'area $[L^2]$, e richiede un'ulteriore convenzione per avere significato. Il numero che questo articolo usa è il rapporto 8 tra grandezze della stessa dimensione.

Una lettura delle implicazioni topologiche

Quanto segue è una **lettura** basata sui fatti consolidati sopra esposti.

Il fatto che infiniti non numerabili $\mathbb{R}^4$ esotici esistano soltanto nello spazio euclideo quadridimensionale può essere letto, dal punto di vista dell'OS dell'Universo, come un fenomeno in cui la libertà di connessione topologica è massimizzata nella trasformazione di dati dal patch di rendering 3D 4π al bozzolo protettivo 4D $16\pi^2$. L'immagine è quella di un protocollo interno di disposizione dei dati (la struttura differenziabile) che può ramificarsi pur restando topologicamente un unico $\mathbb{R}^4$.

Se esista una corrispondenza rigorosa tra la realizzabilità delle forme d'intersezione nella teoria di Donaldson e il riscaldamento dei volumi di questo articolo è un **compito per il futuro**. Questa sezione indica la possibilità di una corrispondenza strutturale tra i due.

Sul versante della fisica esistono anche lavori nella direzione opposta: Król e Asselmeyer-Maluga (2025), argomentando a partire dalla gravità quantistica, suggeriscono che 4-sfere lisce esotiche agiscano come istantoni gravitazionali e che la congettura di Poincaré liscia in dimensione quattro verrebbe così negata. Il presente articolo non segue questa via; tratta la congettura di Poincaré liscia in dimensione quattro come aperta e legge strutturalmente risultati consolidati.

5. Conclusione

Questo articolo ha mostrato quanto segue.

1. Mediante il teorema di unicità $n = 3$, il patch di massa ipersferico quadridimensionale è fissato univocamente come $m^{(4)} = \text{Vol}(S^3) = 2\pi^2$ (teorema 2.1).
2. Mediante la decomposizione di Hopf, per ogni raggio R il prodotto dell'area della base πR^2 per la circonferenza della fibra $2\pi R$ è uguale al volume dello spazio totale $2\pi^2 R^3$ (teorema 3.1).
3. Per $R = 2$ entrambi i fattori assumono il valore numerico 4π , il che fissa il bozzolo toroidale $16\pi^2$ come **un unico oggetto geometrico: la 3-sfera di raggio due** (teorema 3.3). Il raggio di coincidenza si sposta con l'unità di lunghezza; ciò che non dipende dalle unità è il rapporto di volumi $2^3 = 8$ (corollario 3.4).
4. La relazione con il $\mathbb{R}^4$ esotico è stata presentata tenendo separati il fatto geometrico consolidato e la lettura costruita su di esso (sezione 4).

Prima di essere 4π preso due volte, $16\pi^2$ è il volume della 3-sfera di raggio due. Al suo interno la struttura a fibre di Hopf divide base e fibra in 4π ciascuna; le unità decidono a quale raggio questa divisione si mostra, e soltanto il fattore **8**, che accompagna il raddoppio del raggio, non sceglie unità.

Registro delle revisioni

Quarta edizione (settembre 2026): la forma è stata allineata al modello attuale (una nota di portata subito dopo il riassunto, il registro delle revisioni spostato dall'inizio a subito prima dei riferimenti bibliografici, e la «dichiarazione di portata» finale raccolta nella nota di portata). Nel titolo, «Delucidazione topologica» è diventato «Un'interpretazione strutturale». Nella sezione 1.2 è stata corretta l'attribuzione della non numerabilità degli $\mathbb{R}^4$ esotici (la famiglia infinita si deve a Gompf, la non numerabilità a Taubes). Nella sezione 4 si citano Król e Asselmeyer-Maluga (2025) come lavoro correlato.

Terza edizione (luglio 2026): è stata rimossa la lettura di $R = 2$ nel teorema 3.3 come raggio critico di equilibrio geometrico, e la differenza di dimensione tra un'area e una lunghezza è stata scritta nella sezione 3. Sono stati corretti gli oggetti del rapporto citato nella proposizione 4.1.

Seconda edizione (luglio 2026): la decomposizione di Hopf è stata riformulata in forma generale con il raggio R come variabile esplicita (teorema 3.1), e $16\pi^2$ è stato identificato come il volume della 3-sfera di raggio due (teorema 3.3). Nella sezione 4 sono stati separati il fatto algebrico consolidato e la lettura topologica.

Bibliografia

1. Freedman, M. H. (1982). *The topology of four-dimensional manifolds*. Journal of Differential Geometry.
2. Donaldson, S. K. (1983). *An application of gauge theory to four-dimensional topology*. Journal of Differential Geometry.
3. Gompf, R. E. (1983). *Three exotic $\mathbb{R}^4$'s and other anomalies*. Journal of Differential Geometry.
4. Gompf, R. E. (1985). *An infinite set of exotic $\mathbb{R}^4$'s*. Journal of Differential Geometry.
5. Taubes, C. H. (1987). *Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds*. Journal of Differential Geometry.
6. Hopf, H. (1931). *Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche*. Mathematische Annalen.
7. Yamagishi, Y. (2026). *The Uniqueness Theorem of $n = 2$ for Spherically Symmetric Density Distributions* [Articolo 01]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186
8. Yamagishi, Y. (2026). *Physical Law as a Description Language of the Universe OS* [Articolo 13]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404917
9. Yamagishi, Y. (2026). *The Yamagishi Kinetic Energy Equation* [Articolo 18]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21430706
10. Król, J., & Asselmeyer-Maluga, T. (2025). *Negation of the Smooth Poincare Conjecture in Dimension 4 and Negation of the Tsirelson's Conjecture Shed Light on Quantum Gravity*. Universe.

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Concesso in licenza Creative Commons Attribuzione 4.0 Internazionale (CC BY 4.0)