

n=3唯一性定理とホップファイブレーションに基づく4次元ポアンカレ予想とエキゾチック構造の構造的解釈

— $2\pi^2$ 単位超球面質量パッチ・ $16\pi^2$ トーラス繭・エキゾチック $\mathbb{R}^4$ の情報幾何学的境界 — [論文08]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年9月 (第4版)

— From thinking to syncing. —

要旨

4次元の位相的ポアンカレ予想（フリードマンの定理）と、4次元ユークリッド空間のエキゾチックな微分構造（エキゾチック $\mathbb{R}^4$ ）に対し、 $n=3$ 唯一性定理とホップファイブレーションに基づく構造的解釈を示す。論証は三段からなる。

第一段： $\mathbb{R}^4$ で密度 $\rho(r) = r^{-n}$ の球殻の質量増加率 $dm/dr = 2\pi^2 r^{3-n}$ が一定になるのは $n=3$ に限られ、その値は3次元球面の体積 $\text{Vol}(S^3) = 2\pi^2$ である（定理2.1）。

第二段：半径 R の3次元球面のホップファイブレーション $S^1 \hookrightarrow S_R^3 \rightarrow S_{R/2}^2$ で、底空間の面積 πR^2 とファイバーの周長 $2\pi R$ の積は、どの R でも全空間の体積 $2\pi^2 R^3$ に一致する（定理3.1）。 $R=2$ では二つの因子がどちらも数値 4π になり、 $16\pi^2 = \text{Vol}(S_{R=2}^3) = 4\pi \times 4\pi$ が実際の幾何学的な分解として実現する（定理3.3）。こうして $16\pi^2$ トーラス繭は、 $(4\pi)^2$ という代数の積である前に、半径2の3次元球面という一つの幾何学的対象として定まる。二つの因子の一致は面積 $[L^2]$ と長さ $[L]$ をくらべたものなので、長さの単位を λ 倍すると、一致する半径は $R=2/\lambda$ へ移る。単位によらないのは、同じ次元の量どうしの比 $\text{Vol}(S_{R=2}^3)/\text{Vol}(S_{R=1}^3) = 2^3 = 8$ のほうである（系3.4）。

第三段：非可算個のエキゾチック $\mathbb{R}^4$ が4次元にだけ存在するという事実を、立体角 4π から $16\pi^2$ への移り変わりとして、情報幾何学の言葉で読む（第4節）。

本稿の射程 (scope note) : 本稿は、4次元トポロジーで確立した結果に対する構造的解釈を提示する。4次元の位相的ポアンカレ予想はフリードマン (1982) が解決しており、本稿はそれを引くのみで、証明には加わらない。可微分な4次元ポアンカレ予想は現在も未解決である。エキゾチック $\mathbb{R}^4$ が在ることはフリードマンの位相的分類とドナルドソンのゲージ理論から従い、ゴンフ (1985) が無限個の族を、タウベス (1987) がそれが非可算個であることを示した。第4節の読みはこれらの結果の導出ではなく、体積の倍率 $2^3 = 8$ と交叉形式の理論とのあいだに厳密な対応があるかは開いた問いである。定理3.1の分解は、全測地的ファイバーをもつリーマン沈め込みの体積公式 (ファイバーの長さが一定なら、全空間の体積は底空間の体積とファイバーの長さの積) の一例として、標準的に成り立つ。加えたのは、 $n = 3$ 唯一性定理で $2\pi^2$ を4次元の単位パッチとして定め、それをホップの繊維構造へ解いたこと、体系で繰り返し現れる $16\pi^2$ に半径2の3次元球面という実体を与え、その中で底空間とファイバーが 4π ずつに分かれることを示したこと、そしてその分かれ方が見える半径は単位の選び方で動き、動かないのは体積比 8 であることを見分けたことである。

1. 序論：4次元トポロジーの特異性とポアンカレ予想

1.1 4次元ポアンカレ予想とフリードマンの定理

マイケル・フリードマン (1982) は、位相的な圏で4次元ポアンカレ予想を解決した。

1.2 4次元における微分トポロジーの特異性 (エキゾチック $\mathbb{R}^4$)

フリードマンの位相的分類とサイモン・ドナルドソン (1983) のゲージ理論を合わせると、4次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ には、標準のものと微分同相でない微分構造 (エキゾチック $\mathbb{R}^4$) が存在することが従う。ロバート・ゴンフ (1985) はその無限個の族を構成し、クリフォード・タウベス (1987) はそれが非可算個あることを示した。 $n \neq 4$ の $\mathbb{R}^n$ では微分構造はただ一つであり、この豊かさは4次元に固有である。

2. 4次元空間における $n = 3$ 唯一性定理

定理 2.1 ($n = 3$ 唯一性定理 — 4次元超球面パッチ定理)

$\mathbb{R}^4$ において、球対称べき型密度分布 $\rho(r) = r^{-n}$ を持つ3次元超球殻 S_r^3 の質量増加率：

$$\frac{dm^{(4)}}{dr} = \text{Vol}(S^3) \cdot r^{3-n} = 2\pi^2 r^{3-n}$$

が $(0, \infty)$ 上で一様かつ定数となるための必要十分条件は $n = 3$ である。このとき定数値は3次元超球面の体積 $\text{Vol}(S^3) = 2\pi^2$ となる。

証明

$\mathbb{R}^4$ における体積要素は $dV = 2\pi^2 r^3 dr$ である。球殻質量は $dm = \rho(r)dV = 2\pi^2 r^{3-n} dr$ 。 $dm/dr = 2\pi^2 r^{3-n}$ が r に依存しないための必要十分条件は $3 - n = 0 \iff n = 3$ であり、このとき $dm/dr = 2\pi^2$ となる。

これは論文01の定理1（3次元での $n = 2$ ）を、4次元へ移したものである。

3. ホップファイブレーションによる幾何学的解凍

前節で定めた4次元の単位パッチ $2\pi^2$ を、ホップファイブレーションの繊維構造へ分解する。本節では3次元球面の半径 R を明示変数として扱う。以下に見るとおり、半径を変数にすることが、 $16\pi^2$ の正体を見分ける鍵になる。

定理 3.1（ホップ分解定理）

半径 R の3球面に対するホップファイブレーション

$$S^1 \hookrightarrow S_R^3 \longrightarrow S_{R/2}^2$$

において、底空間 $S_{R/2}^2$ の面積とファイバー S^1 の周長の積は、任意の $R > 0$ について全空間の体積に一致する：

$$\underbrace{\pi R^2}_{\text{底空間の面積}} \times \underbrace{2\pi R}_{\text{ファイバーの周長}} = 2\pi^2 R^3 = \text{Vol}(S_R^3)$$

証明

ホップファイブレーションにおいて、半径 R の3球面は半径 $R/2$ の2球面を底空間とする。したがって底空間の面積は

$$4\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \pi R^2$$

であり、ファイバーは半径 R の大円であるからその周長は $2\pi R$ である。両者の積は

$$\pi R^2 \cdot 2\pi R = 2\pi^2 R^3$$

となり、これは半径 R の3球面の体積 $\text{Vol}(S_R^3) = 2\pi^2 R^3$ に等しい。

系 3.2 (単位半径の場合 — 4次元質量パッチ)

$R = 1$ のとき、定理3.1は

$$2\pi^2 = \pi \times 2\pi$$

を与える。すなわち $n = 3$ 唯一性定理で確定した質量パッチ $2\pi^2$ は、底空間面積 π とファイバー周長 2π の積として解凍される。

定理 3.3 ($R = 2$ における山岸パッチの二重出現 — $16\pi^2$ トーラス繭の実体)

$R = 2$ のとき、ホップ分解の両因子はともに山岸パッチ 4π に一致し、全空間体積は $16\pi^2$ となる：

$$16\pi^2 = \text{Vol}(S^3_{R=2}) = \underbrace{4\pi}_{\text{底空間 } S^2_{R/2=1} \text{ の立体角}} \times \underbrace{4\pi}_{\text{ファイバーの周長}}$$

さらに、標準計量の下で両因子の数値が一致する R は $R = 2$ に限られる。

証明

定理3.1に $R = 2$ を代入すると、底空間の面積は $\pi \cdot 2^2 = 4\pi$ 、ファイバーの周長は $2\pi \cdot 2 = 4\pi$ 、全空間体積は $2\pi^2 \cdot 2^3 = 16\pi^2$ となる。

数値の一致条件

$$\pi R^2 = 2\pi R$$

を $R > 0$ の範囲で解けば、両辺を $\pi R (\neq 0)$ で除して $R = 2$ を得る。

3.1 一致する半径は単位で動き、体積比は動かない

定理3.3の一致がくらべる二つの量は、次元が違う。底空間の面積 πR^2 は $[L^2]$ 、ファイバーの周長 $2\pi R$ は $[L]$ である。そのため、一致する半径は長さの単位の取り方に依存し、単位を λ 倍すると

$$\pi(\lambda R)^2 = 2\pi(\lambda R) \implies R = \frac{2}{\lambda}$$

へ移る ($\lambda = 2$ なら $R = 1$ 、 $\lambda = 10$ なら $R = 1/5$)。 $R = 2$ は、 4π が二つ現れるように選んだ半径である。面積と長さを等しいとおかないという規律は、論文18が同じ種類の同定 (S^1 の周長 2π と立体角 4π) について立て

たものである。

これに対して、次の三つは次元がそろっており、単位の取り方によらずに成り立つ。

- 定理3.1（ホップ分解）そのもの。 $[L^2] \times [L] = [L^3]$ で次元がそろい、全測地的ファイバーをもつリーマン沈め込みの体積公式の帰結である。
- $16\pi^2 = \text{Vol}(S_{R=2}^3)$ 。 $2\pi^2 \cdot 2^3$ という算術であり、 $16\pi^2$ は半径2の3球面の体積である。
- 系3.4の比 $2^3 = 8$ 。同じ次元の量どうしの比であり、スケール不変である。

系 3.4（トーラス繭とパッチの体積比）

定理3.3と系3.2より、 $16\pi^2$ トーラス繭と $2\pi^2$ 質量パッチの比は、半径倍化に伴う体積スケーリングとして厳密に決定される：

$$\frac{C_{\text{Torus}}}{m^{(4)}} = \frac{\text{Vol}(S_{R=2}^3)}{\text{Vol}(S_{R=1}^3)} = \frac{16\pi^2}{2\pi^2} = 2^3 = 8$$

3.2 幾何学的意義

定理3.3は、本体系で繰り返し現れる量 $16\pi^2 = (4\pi)^2$ に、代数の積を超えた実体を与える。 $16\pi^2$ は「立体角 4π を二つ掛けたもの」である前に、半径2の3球面という一つの幾何学的対象であり、その内部でホップの繊維構造が底空間とファイバーを 4π ずつに分けている。

標準計量の下で $R = 2$ を取れば、ホップ分解の二つの因子はどちらも数値 4π になり、 $16\pi^2 = 4\pi \times 4\pi$ という分解が実際の幾何学的な分解として実現する。これは、本体系が $16\pi^2$ を $4\pi \times 4\pi$ と読む（論文13のモジュール規則）ことに対応物を与える。順序は「 4π が現れるように R を選ぶ」であり、 $16\pi^2$ が半径2の3球面の体積であるという事実は、 $R = 2$ の読み方とは独立に成り立つ。

4. エキゾチック $\mathbb{R}^4$ の情報幾何学的解釈

命題 4.1（体積比の確定）

半径1の3球面 $S_{R=1}^3$ （体積 $2\pi^2$ ）と半径2の3球面 $S_{R=2}^3$ （体積 $16\pi^2$ ）の比は、系3.4より $2^3 = 8$ で確定する。

この比がくらべているのは二つの3球面である：

$$\frac{\text{Vol}(S_{R=2}^3)}{\text{Vol}(S_{R=1}^3)} = \frac{16\pi^2}{2\pi^2} = 8$$

S^2 （面積 4π ）と $S_{R=2}^3$ （体積 $16\pi^2$ ）を割ると $16\pi^2/4\pi = 4\pi \approx 12.57$ になるが、これは面積 $[L^2]$ と体積 $[L^3]$ の比で、意味を与えるには別の規約が要る。本稿が数として使うのは、同じ次元どうしの比 **8** である。

位相幾何学的な含意の読み

以下は、上の確定した事実に基づく読みである。

4次元ユークリッド空間にだけ非可算個のエキゾチック $\mathbb{R}^4$ が存在するという事実は、宇宙OSの観点からは、3Dレンダリングパッチ 4π から4D保護繭 $16\pi^2$ へのデータ変換において、位相的な接続の自由度が極大になる現象として読むことができる。位相的には一つの $\mathbb{R}^4$ でありながら、内部のデータ配置プロトコル（微分構造）が分岐しうる、という描像である。

ドナルドソン理論における交叉形式の実現可能性と、本稿の体積のスケーリングとのあいだに厳密な対応があるかどうかは、今後の課題である。本節は、両者のあいだに構造的な対応がありうることを指し示す。

物理の側には逆向きの研究もある。Król と Asselmeyer-Maluga（2025）は量子重力の議論から、エキゾチックな滑らかな4次元球面が重力のインスタントンとして働き、滑らかな4次元ポアンカレ予想は否定されると示唆する。本稿はその道を取らず、滑らかな4次元ポアンカレ予想を未解決として扱い、確立した結果を構造的に読む。

5. 結論

本稿は次を示した。

- $n = 3$ 唯一性定理により、4次元の超球面質量パッチが $m^{(4)} = \text{Vol}(S^3) = 2\pi^2$ として一意に定まる（定理2.1）。
- ホップ分解により、どの半径 R でも底空間の面積 πR^2 とファイバーの周長 $2\pi R$ の積が全空間の体積 $2\pi^2 R^3$ に一致する（定理3.1）。
- $R = 2$ で二つの因子がどちらも数値 4π になり、 $16\pi^2$ トーラス繭が半径2の3球面という一つの幾何学的対象として定まる（定理3.3）。一致する半径は長さの単位で動き、単位によらないのは体積比 $2^3 = 8$ である（系3.4）。
- エキゾチック $\mathbb{R}^4$ との関係は、確定した幾何学的事実と、その上に立つ読みとを分けて示した（第4節）。

$16\pi^2$ は、 4π を二つ掛けた数である前に、半径2の3球面の体積である。ホップの繊維構造は其中で底空間とファイバーを 4π ずつに分け、どの半径でその分かれ方が見えるかは単位が決め、半径を倍にしたときの **8** 倍だけが単位を選ばない。

改訂記録

第4版（2026年9月）：書式を現行の型に揃えた（要旨の直後に射程注記を置き、冒頭にあった改訂記録を参考文献の直前へ移し、末尾の「射程の明示」を射程注記にまとめた）。題名の「位相幾何学的解明」を「構造的解釈」に改めた。第1.2節で、エキゾチック $\mathbb{R}^4$ が非可算個あることの帰属を正した（無限個の族はゴンフ、非可算性はタウベスによる）。第4節に、関連研究として Król と Asselmeyer-Maluga（2025）を引いた。

第3版（2026年7月）：定理3.3の $R = 2$ を幾何学的に釣り合う臨界半径と読む記述を外し、面積と長さの次元の違いを第3節に書いた。命題4.1が引いていた比の対象を正した。

第2版（2026年7月）：ホップ分解を半径 R を明示変数とする一般形に整理し（定理3.1）、 $16\pi^2$ を半径2の3球面の体積として同定した（定理3.3）。第4節で、確定した代数的事実と位相幾何学的な読みとを分けた。

参考文献

1. Freedman, M. H. (1982). *The topology of four-dimensional manifolds*. Journal of Differential Geometry.
2. Donaldson, S. K. (1983). *An application of gauge theory to four-dimensional topology*. Journal of Differential Geometry.
3. Gompf, R. E. (1983). *Three exotic $\mathbb{R}^4$'s and other anomalies*. Journal of Differential Geometry.
4. Gompf, R. E. (1985). *An infinite set of exotic $\mathbb{R}^4$'s*. Journal of Differential Geometry.
5. Taubes, C. H. (1987). *Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds*. Journal of Differential Geometry.
6. Hopf, H. (1931). *Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche*. Mathematische Annalen.
7. 山岸勇輝 (2026). 球対称密度分布における $n = 2$ の唯一性定理 [論文01]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186
8. 山岸勇輝 (2026). 宇宙OS記述言語としての物理法則 [論文13]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404917
9. 山岸勇輝 (2026). 山岸運動エネルギー方程式 [論文18]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21430706
10. Król, J., & Asselmeyer-Maluga, T. (2025). *Negation of the Smooth Poincare Conjecture in Dimension 4 and Negation of the Tsirelson's Conjecture Shed Light on Quantum Gravity*. Universe.

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)