

# n=3 유일성 정리와 호프 올다발을 통한 4차원 푸앵카레 추측과 이색적 구조의 구조적 해석

—  $2\pi^2$  초구면 단위 질량 조각,  $16\pi^2$  원환 고치, 그리고 이색적  $\mathbb{R}^4$ 의 정보-기하학적 경계 — [논문 08]

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)  
Yamagishi Complexity Torus Lab, 일본  
2026년 9월 (제4판)

— From thinking to syncing. —

## 초록

4차원 위상적 푸앵카레 추측(프리드먼 정리)과 4차원 유클리드 공간의 이색적 미분 구조(이색적  $\mathbb{R}^4$ )에 대하여,  $n=3$  유일성 정리와 호프 올다발에 기초한 구조적 해석을 제시한다. 논의는 세 단계로 진행된다.

**첫째 단계:**  $\mathbb{R}^4$ 에서 껍질 질량 증가율  $dm/dr = 2\pi^2 r^{3-n}$ 은 밀도  $\rho(r) = r^{-n}$ 에 대해  $n=3$ 일 때에만 상수이며, 그 값은 3차원 구면의 부피  $\text{Vol}(S^3) = 2\pi^2$ 이다(정리 2.1).

**둘째 단계:** 호프 올다발  $S^1 \hookrightarrow S_R^3 \rightarrow S_{R/2}^2$  (반지름  $R$ 인 3차원 구면의 올다발)에 대하여, 밀넓이  $\pi R^2$ 와 올의 둘레  $2\pi R$ 의 곱은 전체 공간의 부피  $2\pi^2 R^3$ 과 같으며, 이는 모든  $R$ 에 대해 성립한다(정리 3.1).  $R=2$ 에서 두 인자는 모두 수치  $4\pi$ 를 취하고,  $16\pi^2 = \text{Vol}(S_{R=2}^3) = 4\pi \times 4\pi$ 가 실제 기하학적 분해로서 실현된다(정리 3.3). 이로써  $16\pi^2$  원환 고치는, 대수적 곱  $(4\pi)^2$ 이기 이전에 하나의 기하학적 대상, 곧 반지름 2인 3차원 구면으로 확정된다. 두 인자의 일치하는 넓이  $[L^2]$ 와 길이  $[L]$ 를 비교하는 것이므로, 길이 단위를  $\lambda$ 배로 바꾸면 일치하는 반지름은  $R=2/\lambda$ 로 옮겨 간다. 단위에 의존하지 않는 것은 같은 차원의 양끼리의 비  $\text{Vol}(S_{R=2}^3)/\text{Vol}(S_{R=1}^3) = 2^3 = 8$ 이다(따름정리 3.4).

**셋째 단계:** 비가산 무한히 많은 이색적  $\mathbb{R}^4$ 가 4차원에만 존재한다는 사실을, 정보 기하학의 언어로 입체각  $4\pi$ 에서  $16\pi^2$ 로의 이행으로 읽는다(4절).

**본 논문의 범위(scope note):** 본 논문은 4차원 위상수학에서 확립된 결과들에 대한 **구조적 해석**을 제시한다. 4차원 위상적 푸앵카레 추측은 프리드먼(1982)이 해결했으며, 본 논문은 이를 인용할 뿐 그 증명에는 관여하지 않는다. 매끄러운 4차원 푸앵카레 추측은 여전히 미해결이다. 이색적  $\mathbb{R}^4$ 의 존재는 프리드먼의 위상적 분류와 도널드슨의 게이지 이론을 함께 쓰면 따라 나오며, 고프(Gompf, 1985)가 무한족을 구성했고 타우브스(Taubes, 1987)가 그것이 비가산 무한히 많음을 보였다. 4절의 읽기는 이 결과들의 유도가 아니며, 부피 인자  $2^3 = 8$ 과 교차 형식 이론 사이에 엄밀한 대응이 있는지는 열린 문제이다. 정리 3.1의 분해는 완전 측지적 올을 갖는 리만 잠김의 부피 공식의 표준적인 사례로서 성립한다(올의 길이가 일정하면 전체 공간의 부피는 밀공간의 부피에 올의 길이를 곱한 것이다). **본 논문이 더하는 것은**,  $2\pi^2$ 를 4차원 단위 조각으로 확정하고( $n = 3$  유일성 정리에 의해) 이를 호프 올 구조로 펼친다는 점, 반복해서 나타나는 양  $16\pi^2$ 에 실체, 곧 반지름 2인 3차원 구면을 부여하며 그 안에서 밀공간과 올이 각각  $4\pi$ 씩 나누어 갖는다는 점, 그리고 단위 선택에 따라 움직이는 것 — 그 분할이 보이게 되는 반지름 — 과 움직이지 않는 것, 곧 부피비 8을 구별한다는 점이다.

## 1. 서론: 4차원 위상수학의 특이성과 푸앵카레 추측

### 1.1 4차원 푸앵카레 추측과 프리드먼 정리

마이클 프리드먼(1982)은 위상 범주에서 4차원 푸앵카레 추측을 해결했다.

### 1.2 4차원 미분위상수학의 특이성(이색적 $\mathbb{R}^4$ )

프리드먼의 위상적 분류와 사이먼 도널드슨의 게이지 이론(1983)을 결합하면, 4차원 유클리드 공간  $\mathbb{R}^4$ 가 표준 구조와 미분동형이 아닌 미분 구조(이색적  $\mathbb{R}^4$ )를 갖는다는 것이 따라 나온다. 로버트 고프(Robert Gompf, 1985)가 그 무한족을 구성했고, 클리퍼드 타우브스(Clifford Taubes, 1987)가 그것이 비가산 무한히 많음을 보였다.  $n \neq 4$ 이면 공간  $\mathbb{R}^n$ 은 단 하나의 미분 구조만을 가진다. 이 풍부함은 4차원에 고유한 것이다.

## 2. 4차원 공간에서의 $n = 3$ 유일성 정리

### 정리 2.1 ( $n = 3$ 유일성 정리 — 4D 초구면 조각 정리)

$\mathbb{R}^4$ 에서 구대칭 거듭제곱 밀도  $\rho(r) = r^{-n}$ 에 대하여, 3차원 초구면 겹질  $S_r^3$ 의 질량 증가율

$$\frac{dm^{(4)}}{dr} = \text{Vol}(S^3) \cdot r^{3-n} = 2\pi^2 r^{3-n}$$

이  $(0, \infty)$ 에서 균일하고 일정할 필요충분조건은  $n = 3$ 이다. 이때 그 상수값은 3차원 구면의 부피  $\text{Vol}(S^3) = 2\pi^2$ 이다.

### 증명.

$\mathbb{R}^4$ 에서 부피 요소는  $dV = 2\pi^2 r^3 dr$ 이다. 겹질 질량은  $dm = \rho(r)dV = 2\pi^2 r^{3-n} dr$ 이다.  $dm/dr = 2\pi^2 r^{3-n}$ 이  $r$ 에 의존하지 않을 필요충분조건은  $3 - n = 0 \iff n = 3$ 이며, 이때  $dm/dr = 2\pi^2$ 이다.

이는 논문 01의 정리 1(3차원에서의  $n = 2$ )을 4차원으로 옮긴 것이다.

### 3. 호프 올다발을 통한 기하학적 전개

앞 절에서 확정한 4차원 단위 조각  $2\pi^2$ 를 호프 올다발의 올 구조로 분해한다. 이 절에서는 3차원 구면의 반지름  $R$ 를 명시적 변수로 다룬다. 뒤에서 보듯이, 반지름을 변수로 삼는 것이  $16\pi^2$ 가 실제로 무엇인지를 알아보는 열쇠이다.

#### 정리 3.1 (호프 분해 정리)

반지름  $R$ 인 3차원 구면의 호프 올다발

$$S^1 \hookrightarrow S_R^3 \longrightarrow S_{R/2}^2$$

에 대하여, 밑공간  $S_{R/2}^2$ 의 넓이와 올  $S^1$ 의 둘레의 곱은 모든  $R > 0$ 에 대해 전체 공간의 부피와 같다:

$$\underbrace{\pi R^2}_{\text{밑넓이}} \times \underbrace{2\pi R}_{\text{올의 둘레}} = 2\pi^2 R^3 = \text{Vol}(S_R^3)$$

### 증명.

호프 올다발에서 반지름  $R$ 인 3차원 구면은 반지름  $R/2$ 인 2차원 구면을 밑공간으로 가진다. 따라서 밑넓이는

$$4\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \pi R^2$$

이고, 올은 반지름  $R$ 인 대원이므로 둘레가  $2\pi R$ 이다. 둘의 곱은

$$\pi R^2 \cdot 2\pi R = 2\pi^2 R^3$$

이며, 이는 부피  $\text{Vol}(S_R^3) = 2\pi^2 R^3$ , 곧 반지름  $R$ 인 3차원 구면의 부피와 같다.

### 따름정리 3.2 (단위 반지름의 경우 — 4D 질량 조각)

$R = 1$ 에서 정리 3.1은

$$2\pi^2 = \pi \times 2\pi$$

를 준다. 즉 질량 조각  $2\pi^2$  —  $n = 3$  유일성 정리로 확정된 것 — 는 밑넓이  $\pi$ 와 올의 둘레  $2\pi$ 의 곱으로 펼쳐진다.

### 정리 3.3 ( $R = 2$ 에서 야마기시 조각의 이중 출현 — $16\pi^2$ 고치의 정체)

$R = 2$ 에서 호프 분해의 두 인자는 모두 야마기시 조각  $4\pi$ 와 일치하며, 전체 공간의 부피는  $16\pi^2$ 이다:

$$16\pi^2 = \text{Vol}(S_{R=2}^3) = \underbrace{4\pi}_{\text{밀공간의 입체각 } S_{R/2=1}^2} \times \underbrace{4\pi}_{\text{올의 둘레}}$$

나아가 표준 계량 아래에서  $R = 2$ 는 두 인자의 수치가 일치하는 유일한 반지름이다.

#### 증명.

$R = 2$ 를 정리 3.1에 대입하면, 밑넓이는  $\pi \cdot 2^2 = 4\pi$ , 올의 둘레는  $2\pi \cdot 2 = 4\pi$ , 전체 부피는  $2\pi^2 \cdot 2^3 = 16\pi^2$ 이다.

유일성을 보이기 위해 일치 조건

$$\pi R^2 = 2\pi R$$

을  $R > 0$ 에서 푼다. 양변을  $\pi R$  ( $\neq 0$ )로 나누면  $R = 2$ 를 얻는다.

### 3.1 일치하는 반지름은 단위와 함께 움직이고, 부피비는 움직이지 않는다

정리 3.3의 일치에서 비교되는 두 양은 차원이 다르다. 밑넓이  $\pi R^2$ 는  $[L^2]$ 이고 올의 둘레  $2\pi R$ 는  $[L]$ 이다. 따라서 둘이 일치하는 반지름은 길이 단위의 선택에 의존하며, 단위를  $\lambda$ 배로 바꾸면 그 반지름은

$$\pi(\lambda R)^2 = 2\pi(\lambda R) \implies R = \frac{2}{\lambda}$$

로 옮겨 간다( $R = 1$ 은  $\lambda = 2$ 일 때,  $R = 1/5$ 는  $\lambda = 10$ 일 때).  $R = 2$ 는  $4\pi$ 가 두 번 나타나도록 고른 반지름이다. 넓이를 길이와 같다고 놓지 않는 규율은, 논문 18이 같은 종류의 동일시(둘레  $2\pi$  —  $S^1$ 의 둘레 — 와 입체각  $4\pi$ )에 대해 세운 것이다.

이에 비해 다음 세 가지는 차원적으로 일관되며 단위의 선택과 무관하게 성립한다.

- i. 정리 3.1(호프 분해) 자체:  $[L^2] \times [L] = [L^3]$ 은 차원적으로 일관되며, 완전 측지적 올을 갖는 리만 잠김의 부피 공식의 귀결이다.
- ii.  $16\pi^2 = \text{Vol}(S_{R=2}^3)$ : 산술  $2\pi^2 \cdot 2^3$ 이며,  $16\pi^2$ 는 반지름 2인 3차원 구면의 부피이다.
- iii. 따름정리 3.4의 비  $2^3 = 8$ : 같은 차원의 양끼리의 비이므로 척도 불변이다.

#### 따름정리 3.4 (고치 대 조각의 부피비)

정리 3.3과 따름정리 3.2로부터,  $16\pi^2$  원환 고치와  $2\pi^2$  질량 조각의 비는 반지름을 두 배로 할 때 따르는 부피의 척도 변화로서 엄밀하게 정해진다:

$$\frac{C_{\text{Torus}}}{m^{(4)}} = \frac{\text{Vol}(S_{R=2}^3)}{\text{Vol}(S_{R=1}^3)} = \frac{16\pi^2}{2\pi^2} = 2^3 = 8$$

### 3.2 기하학적 의미

정리 3.3은 이 체계에서 반복해서 나타나는 양  $16\pi^2 = (4\pi)^2$ 에 대수적 곱셈을 넘어서는 실체를 부여한다. “입체각  $4\pi$ 를 제공한 것”이기 이전에,  $16\pi^2$ 는 하나의 기하학적 대상, 곧 반지름 2인 3차원 구면이며, 그 안에서 호프 올 구조가 밀공간과 올을 각각  $4\pi$ 씩으로 나눈다.

표준 계량 아래에서  $R = 2$ 를 취하면 호프 분해의 두 인자는 모두 수치  $4\pi$ 를 취하므로, 분해  $16\pi^2 = 4\pi \times 4\pi$ 는 실제 기하학적 분해로서 실현된다. 이는  $16\pi^2$ 를  $4\pi \times 4\pi$ 로 읽는 이 체계의 읽기(논문 13의 모듈 규칙)에 지시 대상을 제공한다. 순서는 “ $R$ 를  $4\pi$ 가 나타나도록 고른다”이다.  $16\pi^2$ 가 반지름 2인 3차원 구면의 부피라는 것은  $R = 2$ 를 어떻게 읽든 성립한다.

## 4. 이색적 $\mathbb{R}^4$ 의 정보-기하학적 해석

#### 명제 4.1 (부피비의 결정)

반지름 1인 3차원 구면  $S_{R=1}^3$ (부피  $2\pi^2$ )과 반지름 2인 3차원 구면  $S_{R=2}^3$ (부피  $16\pi^2$ )의 비는 따름정리 3.4에 의해  $2^3 = 8$ 로 정해진다.

이 비가 비교하는 것은 두 개의 3차원 구면이다:

$$\frac{\text{Vol}(S_{R=2}^3)}{\text{Vol}(S_{R=1}^3)} = \frac{16\pi^2}{2\pi^2} = 8$$

$S^3_{R=2}$ (부피  $16\pi^2$ )를  $S^2$ (넓이  $4\pi$ )로 나누면  $16\pi^2/4\pi = 4\pi \approx 12.57$ 이 되지만, 이는 부피  $[L^3]$ 와 넓이  $[L^2]$ 의 비여서 의미를 가지려면 추가 규약이 필요하다. 본 논문이 쓰는 수는 같은 차원의 양끼리의 비 8이다.

## 위상적 함의에 관한 한 가지 읽기

아래는 위에서 확립된 사실에 기초한 읽기이다.

비가산 무한히 많은 이색적  $\mathbb{R}^4$ 가 4차원 유클리드 공간에서만 존재한다는 사실은, 우주 OS의 관점에서 다음과 같은 현상으로 읽을 수 있다: 3D 렌더링 조각  $4\pi$ 에서 4D 보호 고치  $16\pi^2$ 로의 데이터 변환에서 위상적 연결의 자유도가 최대화된다. 그림은, 위상적으로는 단일한  $\mathbb{R}^4$ 이면서도 내부의 데이터 배치 프로토콜(미분 구조)은 분기할 수 있다는 것이다.

도널드슨 이론에서 교차 형식의 실현 가능성과 본 논문의 부피 척도 변화 사이에 엄밀한 대응이 있는지는 **앞으로의 과제**이다. 이 절은 둘 사이에 구조적 대응이 있을 가능성을 가리킨다.

물리 쪽에는 반대 방향의 연구도 있다. Król과 Asselmeyer-Maluga(2025)는 양자중력의 논의로부터, 이색적인 매끄러운 4차원 구면이 중력 순간자로 작용하며 그 결과 매끄러운 4차원 푸앵카레 추측이 부정될 것이라고 시사한다. 본 논문은 그 길을 택하지 않고, 매끄러운 4차원 푸앵카레 추측을 미해결로 다루며 확립된 결과를 구조적으로 읽는다.

## 5. 결론

본 논문은 다음을 보였다.

- $n = 3$  유일성 정리에 의해 4차원 초구면 질량 조각은  $m^{(4)} = \text{Vol}(S^3) = 2\pi^2$ 로 유일하게 확정된다(정리 2.1).
- 호프 분해에 의해 모든 반지름  $R$ 에 대해 밀넓이  $\pi R^2$ 와 올의 둘레  $2\pi R$ 의 곱은 전체 공간의 부피  $2\pi^2 R^3$ 과 같다(정리 3.1).
- $R = 2$ 에서 두 인자는 모두 수치  $4\pi$ 를 취하며, 이로써  $16\pi^2$  원환 고치가 **하나의 기하학적 대상, 곧 반지름 2인 3차원 구면**으로 확정된다(정리 3.3). 일치하는 반지름은 길이 단위와 함께 움직이며, 단위에 의존하지 않는 것은 부피비  $2^3 = 8$ 이다(따름정리 3.4).
- 이색적  $\mathbb{R}^4$ 와의 관계는, 확립된 기하학적 사실과 그 위에 세운 읽기를 분리한 채로 제시했다(4절).

두 번 곱한  $4\pi$ 이기 이전에,  $16\pi^2$ 는 반지름 2인 3차원 구면의 부피이다. 그 안에서 호프 올 구조는 밀공간과 올을 각각  $4\pi$ 씩으로 나눈다. 그 분할이 어느 반지름에서 드러나는지는 단위가 정하며, 반지름을 두 배로 할 때 따라오는 인자 8만이 단위를 고르지 않는다.

## 개정 기록

**제4판(2026년 9월):** 서식을 현행 템플릿에 맞추었다(범위 주기를 초록 바로 뒤에 두고, 개정 기록을 앞머리에서 참고 문헌 바로 앞으로 옮기고, 끝의 “범위 진술”을 범위 주기에 모았다). 제목의 “위상학적 해명”을 “구조적 해석”으로 바꾸었다. 1.2절에서 이색적  $\mathbb{R}^4$ 의 비가산성의 귀속을 바로잡았다(무한족은 고프, 비가산성은 타우브스에 의한 것이다). 제4절에서 관련 연구로 Król과 Asselmeyer-Maluga(2025)를 인용했다.

**제3판(2026년 7월):** 정리 3.3의  $R = 2$ 를 기하학적 균형의 임계 반지름으로 읽는 읽기를 삭제하고, 넓이와 길이의 차원 차이를 3절에 적었다. 명제 4.1에서 인용한 비의 대상을 바로잡았다.

**제2판(2026년 7월):** 반지름  $R$ 를 명시적 변수로 삼아 호프 분해를 일반형으로 다시 썼고(정리 3.1),  $16\pi^2$ 를 반지름 2인 3차원 구면의 부피로 확인했다(정리 3.3). 4절에서 확립된 대수적 사실과 위상적 읽기를 분리했다.

## 참고문헌

1. Freedman, M. H. (1982). *The topology of four-dimensional manifolds*. Journal of Differential Geometry.
2. Donaldson, S. K. (1983). *An application of gauge theory to four-dimensional topology*. Journal of Differential Geometry.
3. Gompf, R. E. (1983). *Three exotic  $\mathbb{R}^4$ 's and other anomalies*. Journal of Differential Geometry.
4. Gompf, R. E. (1985). *An infinite set of exotic  $\mathbb{R}^4$ 's*. Journal of Differential Geometry.
5. Taubes, C. H. (1987). *Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds*. Journal of Differential Geometry.
6. Hopf, H. (1931). *Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche*. Mathematische Annalen.
7. Yamagishi, Y. (2026). *The Uniqueness Theorem of  $n = 2$  for Spherically Symmetric Density Distributions* [논문 01]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186
8. Yamagishi, Y. (2026). *Physical Law as a Description Language of the Universe OS* [논문 13]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404917
9. Yamagishi, Y. (2026). *The Yamagishi Kinetic Energy Equation* [논문 18]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21430706
10. Król, J., & Asselmeyer-Maluga, T. (2025). *Negation of the Smooth Poincare Conjecture in Dimension 4 and Negation of the Tsirelson's Conjecture Shed Light on Quantum Gravity*. Universe.

— From thinking to syncing. —

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) 라이선스 하에 배포