

Uma interpretação estrutural da conjectura de Poincaré 4D e das estruturas exóticas mediante o teorema de unicidade $n=3$ e a fibração de Hopf

— Retalho de massa unitário hipersférico $2\pi^2$, casulo toroidal $16\pi^2$ e fronteira geométrico-informacional do

$\mathbb{R}^4$ exótico — [Artigo 08]

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japão
Setembro de 2026 (Quarta edição)

— *From thinking to syncing.* —

Resumo

Para a conjectura de Poincaré topológica em dimensão quatro (teorema de Freedman) e as estruturas diferenciáveis exóticas do espaço euclidiano de dimensão quatro ($\mathbb{R}^4$ exótico), apresentamos uma interpretação estrutural baseada no teorema de unicidade $n = 3$ e na fibração de Hopf. A argumentação avança em três etapas.

Primeira etapa: em $\mathbb{R}^4$, a taxa de crescimento da massa da casca $dm/dr = 2\pi^2 r^{3-n}$ de uma densidade $\rho(r) = r^{-n}$ só é constante para $n = 3$, e o seu valor é o volume da 3-esfera $\text{Vol}(S^3) = 2\pi^2$ (teorema 2.1).

Segunda etapa: para a fibração de Hopf $S^1 \hookrightarrow S_R^3 \rightarrow S_{R/2}^2$ da 3-esfera de raio R , o produto da área da base πR^2 pela circunferência da fibra $2\pi R$ é igual ao volume do espaço total $2\pi^2 R^3$, para todo R (teorema 3.1). Em $R = 2$ ambos os fatores assumem o valor numérico 4π , e $16\pi^2 = \text{Vol}(S_{R=2}^3) = 4\pi \times 4\pi$ se realiza como uma decomposição geométrica efetiva (teorema 3.3). O casulo toroidal $16\pi^2$ fica assim fixado, antes de ser o produto algébrico $(4\pi)^2$, como **um único objeto geométrico: a 3-esfera de raio dois**. Como a coincidência dos dois fatores compara uma área $[L^2]$ com um comprimento $[L]$, reescalar a unidade de comprimento por um fator λ desloca o raio de coincidência para $R = 2/\lambda$. O que não depende das unidades é a razão entre grandezas da mesma dimensão, $\text{Vol}(S_{R=2}^3)/\text{Vol}(S_{R=1}^3) = 2^3 = 8$ (corolário 3.4).

Terceira etapa: o fato de existirem infinitos não enumeráveis $\mathbb{R}^4$ exóticos apenas em dimensão quatro é lido, na linguagem da geometria da informação, como a passagem do ângulo sólido 4π para $16\pi^2$ (seção 4).

Alcance (scope note): este artigo apresenta uma **interpretação estrutural** de resultados estabelecidos da topologia em dimensão quatro. A conjectura de Poincaré topológica em dimensão quatro foi resolvida por Freedman (1982); este artigo apenas a cita e não tem nenhuma participação na sua demonstração. A conjectura de Poincaré suave em dimensão quatro permanece aberta. A existência de $\mathbb{R}^4$ exóticos decorre da classificação topológica de Freedman juntamente com a teoria de gauge de Donaldson; Gompf (1985) construiu uma família infinita, e Taubes (1987) mostrou que existem infinitos não enumeráveis. A leitura da seção 4 não é uma derivação desses resultados, e se existe uma correspondência rigorosa entre o fator de volume $2^3 = 8$ e a teoria das formas de interseção é uma questão em aberto. A decomposição do teorema 3.1 vale como caso padrão da fórmula do volume para uma submersão riemanniana com fibras totalmente geodésicas (quando o comprimento da fibra é constante, o volume do espaço total é o volume da base vezes o comprimento da fibra). **O que este artigo acrescenta** é que fixa $2\pi^2$ como retalho unitário de dimensão quatro pelo teorema de unicidade $n = 3$ e o desdobra na estrutura de fibras de Hopf; que dá à grandeza recorrente $16\pi^2$ uma substância, **a 3-esfera de raio dois**, dentro da qual base e fibra repartem 4π cada uma; e que distingue o que se desloca com a escolha de unidades — o raio em que essa repartição se torna visível — do que não se desloca, a razão de volumes 8.

1. Introdução: a singularidade da topologia 4D e a conjectura de Poincaré

1.1 A conjectura de Poincaré 4D e o teorema de Freedman

Michael Freedman (1982) resolveu a conjectura de Poincaré em dimensão quatro na categoria topológica.

1.2 A singularidade da topologia diferencial em dimensão quatro ($\mathbb{R}^4$ exótico)

Combinando a classificação topológica de Freedman com a teoria de gauge de Simon Donaldson (1983), segue-se que o espaço euclidiano de dimensão quatro $\mathbb{R}^4$ admite estruturas diferenciáveis não difeomorfas à estrutura padrão ($\mathbb{R}^4$ exótico). Robert Gompf (1985) construiu uma família infinita delas, e Clifford Taubes (1987) mostrou que existem infinitas não enumeráveis. Para $n \neq 4$ o espaço $\mathbb{R}^n$ tem uma única estrutura diferenciável; essa riqueza é própria da dimensão quatro.

2. O teorema de unicidade $n = 3$ no espaço de dimensão quatro

Teorema 2.1 (Teorema de unicidade $n = 3$ — teorema do retalho hipersférico 4D)

Em $\mathbb{R}^4$, para uma densidade em lei de potência com simetria esférica $\rho(r) = r^{-n}$, a taxa de crescimento da massa da casca hipersférica tridimensional S_r^3 ,

$$\frac{dm^{(4)}}{dr} = \text{Vol}(S^3) \cdot r^{3-n} = 2\pi^2 r^{3-n}$$

é uniforme e constante em $(0, \infty)$ se e somente se $n = 3$. O valor constante é então o volume da 3-esfera $\text{Vol}(S^3) = 2\pi^2$.

Demonstração.

O elemento de volume em $\mathbb{R}^4$ é $dV = 2\pi^2 r^3 dr$. A massa da casca é $dm = \rho(r)dV = 2\pi^2 r^{3-n} dr$. A condição necessária e suficiente para que $dm/dr = 2\pi^2 r^{3-n}$ seja independente de r é $3 - n = 0 \iff n = 3$, e então $dm/dr = 2\pi^2$.

Isto transporta o teorema 1 do Artigo 01 ($n = 2$ em três dimensões) para quatro dimensões.

3. Desdobramento geométrico mediante a fibração de Hopf

Decompomos o retalho unitário de dimensão quatro $2\pi^2$, fixado na seção anterior, segundo a estrutura de fibras da fibração de Hopf. Nesta seção, **o raio R da 3-esfera é tratado como variável explícita**. Como veremos, tornar o raio uma variável é a chave para reconhecer o que $16\pi^2$ realmente é.

Teorema 3.1 (Teorema de decomposição de Hopf)

Para a fibração de Hopf da 3-esfera de raio R ,

$$S^1 \hookrightarrow S_R^3 \longrightarrow S_{R/2}^2$$

o produto da área da base $S_{R/2}^2$ pela circunferência da fibra S^1 é igual ao volume do espaço total para todo $R > 0$:

$$\underbrace{\pi R^2}_{\text{área da base}} \times \underbrace{2\pi R}_{\text{circunferência da fibra}} = 2\pi^2 R^3 = \text{Vol}(S_R^3)$$

Demonstração.

Na fibração de Hopf, a 3-esfera de raio R tem como base a 2-esfera de raio $R/2$. A área da base é, portanto,

$$4\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \pi R^2$$

e a fibra, sendo um círculo máximo de raio R , tem circunferência $2\pi R$. O seu produto é

$$\pi R^2 \cdot 2\pi R = 2\pi^2 R^3$$

que é igual ao volume $\text{Vol}(S_R^3) = 2\pi^2 R^3$ da 3-esfera de raio R .

Corolário 3.2 (O caso de raio unitário — o retalho de massa 4D)

Em $R = 1$, o teorema 3.1 dá

$$2\pi^2 = \pi \times 2\pi$$

Isto é, o retalho de massa $2\pi^2$ fixado pelo teorema de unicidade $n = 3$ se desdobra como o produto da área da base π pela circunferência da fibra 2π .

Teorema 3.3 (Aparição dupla do retalho de Yamagishi em $R = 2$ — a identidade do casulo $16\pi^2$)

Em $R = 2$, ambos os fatores da decomposição de Hopf coincidem com o retalho de Yamagishi 4π , e o volume do espaço total é $16\pi^2$:

$$16\pi^2 = \text{Vol}(S_{R=2}^3) = \underbrace{4\pi}_{\text{ângulo sólido da base } S_{R/2=1}^2} \times \underbrace{4\pi}_{\text{circunferência da fibra}}$$

Além disso, na métrica padrão, $R = 2$ é o único raio em que os valores numéricos dos dois fatores coincidem.

Demonstração.

Substituindo $R = 2$ no teorema 3.1: a área da base é $\pi \cdot 2^2 = 4\pi$, a circunferência da fibra é $2\pi \cdot 2 = 4\pi$, e o volume total é $2\pi^2 \cdot 2^3 = 16\pi^2$.

Para a unicidade, resolvemos a condição de coincidência

$$\pi R^2 = 2\pi R$$

para $R > 0$. Dividindo ambos os membros por πR ($\neq 0$) obtém-se $R = 2$.

3.1 O raio de coincidência se desloca com as unidades; a razão de volumes, não

As duas grandezas comparadas na coincidência do teorema 3.3 diferem em dimensão: a área da base πR^2 é $[L^2]$ e a circunferência da fibra $2\pi R$ é $[L]$. O raio em que coincidem depende, portanto, da escolha da unidade de comprimento; reescalar a unidade por um fator λ o desloca para

$$\pi(\lambda R)^2 = 2\pi(\lambda R) \implies R = \frac{2}{\lambda}$$

($R = 1$ para $\lambda = 2$; $R = 1/5$ para $\lambda = 10$). $R = 2$ é o raio escolhido para que 4π apareça duas vezes. A disciplina de não igualar uma área a um comprimento é a que o Artigo 18 estabeleceu para uma identificação do mesmo tipo (a circunferência 2π de S^1 diante do ângulo sólido 4π).

Em contrapartida, os três pontos seguintes são dimensionalmente coerentes e valem independentemente da escolha de unidades.

- i. **O próprio teorema 3.1 (a decomposição de Hopf):** $[L^2] \times [L] = [L^3]$ é dimensionalmente coerente, e é uma consequência da fórmula do volume para uma submersão riemanniana com fibras totalmente geodésicas.
- ii. $16\pi^2 = \text{Vol}(S^3_{R=2})$: a aritmética $2\pi^2 \cdot 2^3$; $16\pi^2$ é o volume da 3-esfera de raio dois.
- iii. **A razão $2^3 = 8$ do corolário 3.4:** uma razão entre grandezas da mesma dimensão, portanto invariante de escala.

Corolário 3.4 (Razão de volumes entre o casulo e o retalho)

Pelo teorema 3.3 e pelo corolário 3.2, a razão entre o casulo toroidal $16\pi^2$ e o retalho de massa $2\pi^2$ fica determinada rigorosamente como o reescalamiento do volume que acompanha uma duplicação do raio:

$$\frac{C_{\text{Torus}}}{m^{(4)}} = \frac{\text{Vol}(S^3_{R=2})}{\text{Vol}(S^3_{R=1})} = \frac{16\pi^2}{2\pi^2} = 2^3 = 8$$

3.2 Significado geométrico

O teorema 3.3 confere à grandeza $16\pi^2 = (4\pi)^2$, recorrente em todo este corpus, uma substância que vai além da multiplicação algébrica. Antes de ser “o ângulo sólido 4π multiplicado por si mesmo”, $16\pi^2$ é um **único objeto geométrico: a 3-esfera de raio dois**, dentro da qual a estrutura de fibras de Hopf divide base e fibra em 4π cada uma.

Tomando $R = 2$ na métrica padrão, ambos os fatores da decomposição de Hopf assumem o valor numérico 4π , de modo que a decomposição $16\pi^2 = 4\pi \times 4\pi$ se realiza como uma **decomposição geométrica efetiva**. Isso fornece um referente para a leitura que o corpus faz de $16\pi^2$ como $4\pi \times 4\pi$ (a regra de módulo do Artigo 13). A ordem é “ R é escolhido para que 4π apareça”; que $16\pi^2$ seja o volume da 3-esfera de raio dois vale independentemente de como se leia $R = 2$.

4. Interpretação geométrico-informacional do $\mathbb{R}^4$ exótico

Proposição 4.1 (Determinação da razão de volumes)

A razão entre a 3-esfera de raio um $S^3_{R=1}$ (volume $2\pi^2$) e a de raio dois $S^3_{R=2}$ (volume $16\pi^2$) é fixada pelo corolário 3.4 como $2^3 = 8$.

O que essa razão compara são **duas 3-esferas**:

$$\frac{\text{Vol}(S^3_{R=2})}{\text{Vol}(S^3_{R=1})} = \frac{16\pi^2}{2\pi^2} = 8$$

Dividir $S^3_{R=2}$ (volume $16\pi^2$) por S^2 (área 4π) dá $16\pi^2/4\pi = 4\pi \approx 12.57$, mas essa é uma razão entre um volume $[L^3]$ e uma área $[L^2]$, e precisa de uma convenção adicional para ter significado. O número que este artigo usa é a razão **8** entre grandezas da mesma dimensão.

Uma leitura das implicações topológicas

O que se segue é uma **leitura** baseada nos fatos estabelecidos acima.

O fato de existirem infinitos não enumeráveis $\mathbb{R}^4$ exóticos apenas no espaço euclidiano de dimensão quatro pode ser lido, do ponto de vista do OS do Universo, como um fenômeno em que a liberdade de conexão topológica é maximizada na transformação de dados do retalho de renderização 3D 4π para o casulo protetor 4D $16\pi^2$. A imagem é a de um protocolo interno de disposição de dados (a estrutura diferenciável) que pode se ramificar, mesmo sendo topologicamente um único $\mathbb{R}^4$.

Se existe uma correspondência rigorosa entre a realizabilidade das formas de interseção na teoria de Donaldson e o reescalamiento de volumes deste artigo é uma **tarefa para o futuro**. Esta seção aponta para a possibilidade de uma

correspondência estrutural entre ambos.

Do lado da física existem também trabalhos na direção oposta: Król e Asselmeyer-Maluga (2025), argumentando a partir da gravidade quântica, sugerem que 4-esferas suaves exóticas atuam como instantons gravitacionais e que a conjectura de Poincaré suave em dimensão quatro seria assim negada. Este artigo não segue esse caminho; trata a conjectura de Poincaré suave em dimensão quatro como aberta e lê estruturalmente resultados estabelecidos.

5. Conclusão

Este artigo mostrou o seguinte.

1. Pelo teorema de unicidade $n = 3$, o retalho de massa hipersférico de dimensão quatro fica fixado de modo único como $m^{(4)} = \text{Vol}(S^3) = 2\pi^2$ (teorema 2.1).
2. Pela decomposição de Hopf, para todo raio R o produto da área da base πR^2 pela circunferência da fibra $2\pi R$ é igual ao volume do espaço total $2\pi^2 R^3$ (teorema 3.1).
3. Em $R = 2$ ambos os fatores assumem o valor numérico 4π , o que fixa o casulo toroidal $16\pi^2$ como **um único objeto geométrico: a 3-esfera de raio dois** (teorema 3.3). O raio de coincidência se desloca com a unidade de comprimento; o que não depende das unidades é a razão de volumes $2^3 = 8$ (corolário 3.4).
4. A relação com o $\mathbb{R}^4$ exótico foi apresentada mantendo separados o fato geométrico estabelecido e a leitura construída sobre ele (seção 4).

Antes de ser 4π tomado duas vezes, $16\pi^2$ é o volume da 3-esfera de raio dois. Dentro dela, a estrutura de fibras de Hopf divide base e fibra em 4π cada uma; as unidades decidem em que raio essa divisão aparece, e só o fator 8, que acompanha a duplicação do raio, não escolhe unidades.

Registro de revisões

Quarta edição (setembro de 2026): A forma foi alinhada ao modelo atual (uma nota de alcance logo após o resumo, o registro de revisões transferido do início para logo antes das referências, e a “declaração de alcance” final reunida na nota de alcance). No título, “Elucidação topológica” passou a “Uma interpretação estrutural”. Na seção 1.2 foi corrigida a atribuição da não enumerabilidade dos $\mathbb{R}^4$ exóticos (a família infinita deve-se a Gompf, a não enumerabilidade a Taubes). Na seção 4 citam-se Król e Asselmeyer-Maluga (2025) como trabalho relacionado.

Terceira edição (julho de 2026): Foi removida a leitura de $R = 2$ no teorema 3.3 como raio crítico de equilíbrio geométrico, e a diferença de dimensão entre uma área e um comprimento foi escrita na seção 3. Foram corrigidos os objetos da razão citada na proposição 4.1.

Segunda edição (julho de 2026): A decomposição de Hopf foi reformulada em forma geral com o raio R como variável explícita (teorema 3.1), e $16\pi^2$ foi identificado como o volume da 3-esfera de raio dois (teorema 3.3). Na seção 4 foram separados o fato algébrico estabelecido e a leitura topológica.

Referências

1. Freedman, M. H. (1982). *The topology of four-dimensional manifolds*. Journal of Differential Geometry.
2. Donaldson, S. K. (1983). *An application of gauge theory to four-dimensional topology*. Journal of Differential Geometry.
3. Gompf, R. E. (1983). *Three exotic $\mathbb{R}^4$'s and other anomalies*. Journal of Differential Geometry.
4. Gompf, R. E. (1985). *An infinite set of exotic $\mathbb{R}^4$'s*. Journal of Differential Geometry.
5. Taubes, C. H. (1987). *Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds*. Journal of Differential Geometry.
6. Hopf, H. (1931). *Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche*. Mathematische Annalen.
7. Yamagishi, Y. (2026). *The Uniqueness Theorem of $n = 2$ for Spherically Symmetric Density Distributions* [Artigo 01]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186
8. Yamagishi, Y. (2026). *Physical Law as a Description Language of the Universe OS* [Artigo 13]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404917
9. Yamagishi, Y. (2026). *The Yamagishi Kinetic Energy Equation* [Artigo 18]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21430706
10. Król, J., & Asselmeyer-Maluga, T. (2025). *Negation of the Smooth Poincare Conjecture in Dimension 4 and Negation of the Tsirelson's Conjecture Shed Light on Quantum Gravity*. Universe.

— *From thinking to syncing.* —

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Sob licença Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)