

Структурная интерпретация гипотезы Пуанкаре 4D и экзотических структур посредством теоремы единственности $n=3$ и расслоения Хопфа

— Гиперсферическая единичная массовая заплата $2\pi^2$, тороидальный кокон $16\pi^2$ и информационно-геометрическая граница экзотического $\mathbb{R}^4$ — [Статья 08]

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Япония

Сентябрь 2026 (Четвёртое издание)

— *From thinking to syncing.* —

Аннотация

Для четырёхмерной топологической гипотезы Пуанкаре (теоремы Фридмана) и экзотических дифференцируемых структур четырёхмерного евклидова пространства (экзотического $\mathbb{R}^4$) мы предлагаем структурную интерпретацию, основанную на теореме единственности $n = 3$ и расслоении Хопфа. Рассуждение проходит в три этапа.

Первый этап: в $\mathbb{R}^4$ скорость роста массы оболочки $dm/dr = 2\pi^2 r^{3-n}$ для плотности $\rho(r) = r^{-n}$ постоянна только при $n = 3$, и её значение есть объём трёхмерной сферы $\text{Vol}(S^3) = 2\pi^2$ (теорема 2.1).

Второй этап: для расслоения Хопфа $S^1 \hookrightarrow S_R^3 \rightarrow S_{R/2}^2$ трёхмерной сферы радиуса R произведение площади базы πR^2 на длину слоя $2\pi R$ равно объёму тотального пространства $2\pi^2 R^3$ при любом R (теорема 3.1). При $R = 2$ оба множителя принимают численное значение 4π , и $16\pi^2 = \text{Vol}(S_{R=2}^3) = 4\pi \times 4\pi$ реализуется как действительное геометрическое разложение (теорема 3.3). Тем самым тороидальный кокон $16\pi^2$ фиксируется — прежде чем быть алгебраическим произведением $(4\pi)^2$ — как **единый геометрический объект: трёхмерная сфера радиуса два**. Поскольку совпадение двух множителей сравнивает площадь $[L^2]$ с длиной $[L]$, изменение масштаба единицы длины в λ раз переносит радиус совпадения в $R = 2/\lambda$. От единиц не зависит отношение величин одной размерности, $\text{Vol}(S_{R=2}^3)/\text{Vol}(S_{R=1}^3) = 2^3 = 8$ (следствие 3.4).

Третий этап: тот факт, что несчётное множество экзотических $\mathbb{R}^4$ существует только в размерности четыре, прочитывается на языке информационной геометрии как переход от телесного угла 4π к $16\pi^2$ (раздел 4).

Рамки статьи (scope note): настоящая статья предлагает **структурную интерпретацию** установленных результатов четырёхмерной топологии. Четырёхмерная топологическая гипотеза Пуанкаре была решена Фридманом (1982); статья лишь ссылается на неё и не участвует в её доказательстве. Гладкая четырёхмерная гипотеза Пуанкаре остаётся открытой. Существование экзотических $\mathbb{R}^4$ следует из топологической классификации Фридмана вместе с калибровочной теорией Дональдсона; Гомпф (1985) построил бесконечное семейство, а Таубс (1987) показал, что их несчётно много. Прочтение раздела 4 не является выводом этих результатов, и вопрос о том, существует ли строгое соответствие между множителем объёма $2^3 = 8$ и теорией форм пересечения, остаётся открытым. Разложение теоремы 3.1 выполняется как стандартный случай формулы объёма для римановой субмерсии с вполне геодезическими слоями (если длина слоя постоянна, объём тотального пространства равен объёму базы, умноженному на длину слоя). **Что добавляет эта статья:** она фиксирует $2\pi^2$ как четырёхмерную единичную заплату посредством теоремы единственности $n = 3$ и разворачивает её в структуру слоёв Хопфа; она придаёт повторяющейся величине $16\pi^2$ субстанцию — **трёхмерную сферу радиуса два**, внутри которой база и слой получают по 4π каждый; и она отличает то, что сдвигается с выбором единиц (радиус, при котором это деление становится видимым), от того, что не сдвигается, — отношения объёмов 8.

1. Введение: особенность четырёхмерной топологии и гипотеза Пуанкаре

1.1 Гипотеза Пуанкаре 4D и теорема Фридмана

Майкл Фридман (1982) решил четырёхмерную гипотезу Пуанкаре в топологической категории.

1.2 Особенность дифференциальной топологии в размерности четыре (экзотическое $\mathbb{R}^4$)

Из сочетания топологической классификации Фридмана с калибровочной теорией Саймона Дональдсона (1983) следует, что четырёхмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^4$ допускает дифференцируемые структуры, не диффеоморфные стандартной (экзотическое $\mathbb{R}^4$). Роберт Гомпф (1985) построил их бесконечное семейство, а Клиффорд Таубс (1987) показал, что их несчётно много. При $n \neq 4$ пространство $\mathbb{R}^n$ имеет лишь одну дифференцируемую структуру; это богатство присуще размерности четыре.

2. Теорема единственности $n = 3$ в четырёхмерном пространстве

Теорема 2.1 (Теорема единственности $n = 3$ — теорема о четырёхмерной гиперсферической заплате)

В $\mathbb{R}^4$ для сферически симметричной степенной плотности $\rho(r) = r^{-n}$ скорость роста массы трёхмерной гиперсферической оболочки S_r^3 ,

$$\frac{dm^{(4)}}{dr} = \text{Vol}(S^3) \cdot r^{3-n} = 2\pi^2 r^{3-n}$$

равномерна и постоянна на $(0, \infty)$ тогда и только тогда, когда $n = 3$. Постоянное значение есть тогда объём трёхмерной сферы $\text{Vol}(S^3) = 2\pi^2$.

Доказательство.

Элемент объёма в $\mathbb{R}^4$ есть $dV = 2\pi^2 r^3 dr$. Масса оболочки есть $dm = \rho(r)dV = 2\pi^2 r^{3-n} dr$. Необходимое и достаточное условие того, что $dm/dr = 2\pi^2 r^{3-n}$ не зависит от r , есть $3 - n = 0 \iff n = 3$, и тогда $dm/dr = 2\pi^2$.

Это переносит теорему 1 статьи 01 ($n = 2$ в трёх измерениях) на четыре измерения.

3. Геометрическое развёртывание посредством расслоения Хопфа

Мы раскладываем четырёхмерную единичную заплату $2\pi^2$, зафиксированную в предыдущем разделе, по структуре слоёв расслоения Хопфа. В этом разделе **радиус R трёхмерной сферы рассматривается как явная переменная**. Как мы увидим, сделать радиус переменной — ключ к тому, чтобы понять, что такое $16\pi^2$ на самом деле.

Теорема 3.1 (Теорема о разложении Хопфа)

Для расслоения Хопфа трёхмерной сферы радиуса R ,

$$S^1 \hookrightarrow S_R^3 \longrightarrow S_{R/2}^2$$

произведение площади базы $S_{R/2}^2$ на длину слоя S^1 равно объёму тотального пространства при любом $R > 0$:

$$\underbrace{\pi R^2}_{\text{площадь базы}} \times \underbrace{2\pi R}_{\text{длина слоя}} = 2\pi^2 R^3 = \text{Vol}(S_R^3)$$

Доказательство.

В расслоении Хопфа трёхмерная сфера радиуса R имеет базой двумерную сферу радиуса $R/2$. Поэтому площадь базы равна

$$4\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \pi R^2$$

а слой, будучи большой окружностью радиуса R , имеет длину $2\pi R$. Их произведение

$$\pi R^2 \cdot 2\pi R = 2\pi^2 R^3$$

равно объёму $\text{Vol}(S_R^3) = 2\pi^2 R^3$ трёхмерной сферы радиуса R .

Следствие 3.2 (Случай единичного радиуса — четырёхмерная массовая заплата)

При $R = 1$ теорема 3.1 даёт

$$2\pi^2 = \pi \times 2\pi$$

То есть массовая заплата $2\pi^2$, зафиксированная теоремой единственности $n = 3$, разворачивается как произведение площади базы π на длину слоя 2π .

Теорема 3.3 (Двойное появление заплаты Ямагиси при $R = 2$ — что такое кокон $16\pi^2$)

При $R = 2$ оба множителя разложения Хопфа совпадают с заплатай Ямагиси 4π , и объём тотального пространства есть $16\pi^2$:

$$16\pi^2 = \text{Vol}(S_{R=2}^3) = \underbrace{4\pi}_{\text{телесный угол базы } S_{R/2=1}^2} \times \underbrace{4\pi}_{\text{длина слоя}}$$

Более того, при стандартной метрике $R = 2$ — единственный радиус, при котором **численные значения** двух множителей совпадают.

Доказательство.

Подставим $R = 2$ в теорему 3.1: площадь базы равна $\pi \cdot 2^2 = 4\pi$, длина слоя равна $2\pi \cdot 2 = 4\pi$, а полный объём равен $2\pi^2 \cdot 2^3 = 16\pi^2$.

Для доказательства единственности решим условие совпадения

$$\pi R^2 = 2\pi R$$

при $R > 0$. Деля обе части на $\pi R (\neq 0)$, получаем $R = 2$.

3.1 Радиус совпадения сдвигается с единицами, отношение объёмов — нет

Две величины, сравниваемые в совпадении теоремы 3.3, различаются размерностью: площадь базы πR^2 имеет размерность $[L^2]$, а длина слоя $2\pi R$ — размерность $[L]$. Поэтому радиус, при котором они совпадают, зависит от выбора единицы длины; изменение масштаба единицы в λ раз переносит его в

$$\pi(\lambda R)^2 = 2\pi(\lambda R) \implies R = \frac{2}{\lambda}$$

($R = 1$ при $\lambda = 2$; $R = 1/5$ при $\lambda = 10$). $R = 2$ — это радиус, выбранный так, чтобы 4π появилось дважды.

Дисциплину не отождествлять площадь с длиной статья 18 установила для отождествления того же рода (длина 2π окружности S^1 против телесного угла 4π).

Напротив, следующие три утверждения согласованы по размерности и выполняются независимо от выбора единиц.

- i. Сама теорема 3.1 (разложение Хопфа): $[L^2] \times [L] = [L^3]$ согласовано по размерности и является следствием формулы объёма для римановой субмерсии с вполне геодезическими слоями.
- ii. $16\pi^2 = \text{Vol}(S_{R=2}^3)$: арифметика $2\pi^2 \cdot 2^3$; $16\pi^2$ есть объём трёхмерной сферы радиуса два.

iii. **Отношение $2^3 = 8$ из следствия 3.4:** отношение величин одной размерности, а потому масштабно-инвариантное.

Следствие 3.4 (Отношение объёмов кокона к заплате)

Из теоремы 3.3 и следствия 3.2 отношение тороидального кокона $16\pi^2$ к массовой заплате $2\pi^2$ строго определяется как масштабирование объёма, сопровождающее удвоение радиуса:

$$\frac{C_{\text{Torus}}}{m^{(4)}} = \frac{\text{Vol}(S_{R=2}^3)}{\text{Vol}(S_{R=1}^3)} = \frac{16\pi^2}{2\pi^2} = 2^3 = 8$$

3.2 Геометрический смысл

Теорема 3.3 наделяет величину $16\pi^2 = (4\pi)^2$, повторяющуюся во всём этом корпусе, субстанцией, выходящей за пределы алгебраического умножения. Прежде чем быть «телесным углом 4π , умноженным на себя», $16\pi^2$ есть **единый геометрический объект: трёхмерная сфера радиуса два**, внутри которой структура слоёв Хопфа делит базу и слой по 4π каждый.

Если взять $R = 2$ при стандартной метрике, оба множителя разложения Хопфа принимают численное значение 4π , так что разложение $16\pi^2 = 4\pi \times 4\pi$ реализуется как действительное геометрическое разложение. Это даёт референт прочтению корпуса, в котором $16\pi^2$ читается как $4\pi \times 4\pi$ (модульное правило статьи 13). Порядок таков: « R выбирается так, чтобы появилось 4π »; то, что $16\pi^2$ есть объём трёхмерной сферы радиуса два, выполняется независимо от того, как прочитывать $R = 2$.

4. Информационно-геометрическая интерпретация экзотического $\mathbb{R}^4$

Предложение 4.1 (Определение отношения объёмов)

Отношение между трёхмерной сферой радиуса один $S_{R=1}^3$ (объём $2\pi^2$) и трёхмерной сферой радиуса два $S_{R=2}^3$ (объём $16\pi^2$) фиксируется следствием 3.4 как $2^3 = 8$.

Это отношение сравнивает две трёхмерные сферы:

$$\frac{\text{Vol}(S_{R=2}^3)}{\text{Vol}(S_{R=1}^3)} = \frac{16\pi^2}{2\pi^2} = 8$$

Деление $S_{R=2}^3$ (объём $16\pi^2$) на S^2 (площадь 4π) даёт $16\pi^2/4\pi = 4\pi \approx 12.57$, но это отношение объёма $[L^3]$ к площади $[L^2]$, и чтобы оно несло смысл, нужна дополнительная конвенция. Число, которое использует эта статья, — отношение 8 величин одной размерности.

Одно прочтение топологических следствий

Далее следует **прочтение**, основанное на установленных выше фактах.

Тот факт, что несчётное множество экзотических $\mathbb{R}^4$ существует только в четырёхмерном евклидовом пространстве, может быть прочитан, с точки зрения ОС Вселенной, как явление, в котором свобода топологического соединения максимизируется при преобразовании данных от трёхмерной заплата рендеринга 4π к четырёхмерному защитному кокону $16\pi^2$. Картина такова: оставаясь топологически единым $\mathbb{R}^4$, внутренний протокол размещения данных (дифференцируемая структура) может ветвиться.

Существует ли строгое соответствие между реализуемостью форм пересечения в теории Дональдсона и масштабированием объёмов в этой статье — **задача на будущее**. Этот раздел указывает на возможность структурного соответствия между ними.

Со стороны физики есть и работы противоположного направления: Król и Asselmeyer-Maluga (2025), исходя из квантовой гравитации, предполагают, что экзотические гладкие четырёхмерные сферы действуют как гравитационные инстантоны и что гладкая четырёхмерная гипотеза Пуанкаре тем самым была бы опровергнута. Настоящая статья не идёт этим путём; она рассматривает гладкую четырёхмерную гипотезу Пуанкаре как открытую и структурно прочитывает установленные результаты.

5. Заключение

В настоящей статье показано следующее.

1. Посредством теоремы единственности $n = 3$ четырёхмерная гиперсферическая массовая заплата однозначно фиксируется как $m^{(4)} = \text{Vol}(S^3) = 2\pi^2$ (теорема 2.1).
2. Посредством разложения Хопфа при любом радиусе R произведение площади базы πR^2 на длину слоя $2\pi R$ равно объёму тотального пространства $2\pi^2 R^3$ (теорема 3.1).
3. При $R = 2$ оба множителя принимают численное значение 4π , что фиксирует тороидальный кокон $16\pi^2$ как **единый геометрический объект: трёхмерную сферу радиуса два** (теорема 3.3). Радиус совпадения сдвигается с единицей длины; от единиц не зависит отношение объёмов $2^3 = 8$ (следствие 3.4).
4. Связь с экзотическим $\mathbb{R}^4$ изложена так, что установленный геометрический факт и построенное на нём прочтение разведены (раздел 4).

Прежде чем быть дважды взятым 4π , $16\pi^2$ есть объём трёхмерной сферы радиуса два. Внутри неё структура слоёв Хопфа делит базу и слой по 4π каждый; единицы решают, при каком радиусе это деление становится видно, и только множитель 8 , приходящий с удвоением радиуса, не выбирает единиц.

Журнал редакций

Четвёртое издание (сентябрь 2026): оформление приведено к действующему шаблону (замечание о рамках сразу после аннотации, журнал редакций перенесён из начала непосредственно перед списком литературы, а заключительное «указание рамок» собрано в замечание о рамках). В заглавии «Топологическое прояснение» заменено на «Структурная интерпретация». В разделе 1.2 исправлена атрибуция несчётности экзотических $\mathbb{R}^4$ (бесконечное семейство принадлежит Гомпфу, несчётность — Таубсу). В разделе 4 в качестве родственной работы процитированы Król и Asselmeyer-Maluga (2025).

Третье издание (июль 2026): удалено прочтение $R = 2$ в теореме 3.3 как критического радиуса геометрического равновесия, а различие размерностей площади и длины вписано в раздел 3. Исправлены объекты отношения, приводимого в предложении 4.1.

Второе издание (июль 2026): разложение Хопфа переформулировано в общем виде с радиусом R как явной переменной (теорема 3.1), а $16\pi^2$ отождествлено с объёмом трёхмерной сферы радиуса два (теорема 3.3). В разделе 4 разделены установленный алгебраический факт и топологическое прочтение.

Литература

1. Freedman, M. H. (1982). *The topology of four-dimensional manifolds*. Journal of Differential Geometry.
2. Donaldson, S. K. (1983). *An application of gauge theory to four-dimensional topology*. Journal of Differential Geometry.
3. Gompf, R. E. (1983). *Three exotic $\mathbb{R}^4$'s and other anomalies*. Journal of Differential Geometry.
4. Gompf, R. E. (1985). *An infinite set of exotic $\mathbb{R}^4$'s*. Journal of Differential Geometry.
5. Taubes, C. H. (1987). *Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds*. Journal of Differential Geometry.
6. Hopf, H. (1931). *Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche*. Mathematische Annalen.
7. Yamagishi, Y. (2026). *The Uniqueness Theorem of $n = 2$ for Spherically Symmetric Density Distributions* [Статья 01]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186
8. Yamagishi, Y. (2026). *Physical Law as a Description Language of the Universe OS* [Статья 13]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404917
9. Yamagishi, Y. (2026). *The Yamagishi Kinetic Energy Equation* [Статья 18]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21430706

10. Król, J., & Asselmeyer-Maluga, T. (2025). *Negation of the Smooth Poincare Conjecture in Dimension 4 and Negation of the Tsirelson's Conjecture Shed Light on Quantum Gravity*. Universe.

— *From thinking to syncing.* —

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Лицензировано на условиях Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)