無い基音の三つの説明は、成分を同じだけずらすと跳ぶ・動かない・滑らかに動くに分かれる

— 400・600・800 Hz の音に 200 Hz の成分は無いが、最大公約数も差音も自己相関の最初の山も 200 Hz を返す — 分離子は、成分を同じだけずらしたとき、答が跳ぶか、動かないか、滑らかに動くか —

[論文801]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

400・600・800 Hz の三つの成分を鳴らすと、そこに無い 200 Hz の高さ（ピッチ）が聞こえると言われる。その理由として言われる三つの説明——最大公約数、ひずみが作る差音、波形の自己相関——を最も素朴な形で計算し、三つを分ける操作を探す。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、そのままの三つの成分では、三つの説明はどれも 200 Hz を返す——最大公約数 200 Hz、二つの差 200・400 Hz、自己相関の最初の山 5.000000 ms（第2節）。 第二に、波形そのものには 200 Hz の成分が無い——200 Hz の成分 3.752×10^{-16} に対し、400 Hz の成分は 0.500000（第2節）。 第三に、これが本稿の芯である。成分を同じだけずらすと、三つの答が別れる——10 Hz ずらすと、最大公約数は 10 Hz、差音は 200 Hz、自己相関は 203.106667 Hz（第3節）。 第四に、ずらし続けると、跳ぶ・動かない・滑らかに動くになる——最大公約数は 10・20・10・50 Hz、自己相関は 206.218462・209.333585・215.567394 Hz と続き、10 Hz ごとの増えは 3.106667・3.111795・3.115123（第3節）。 第五に、標本化した音でも、でたらめな位相でも、答は変わらない——標本化した自己相関は 199.995555 Hz と 203.112115 Hz、二次のひずみの最も強い周波数は位相 12 通りすべてで 200 Hz（第4節）。 第六に、分離子は、成分を同じだけずらしたとき、答が跳ぶか、動かないか、滑らかに動くか——「無い基音が聞こえる理由」は、ずらさない音では三つのどれとも言え、ずらすまで決まらない（第5節）。 キーワード：基音、差音、自己相関、最大公約数、倍音、ピッチ。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——倍音の並んだ成分から基音の高さが聞こえること、それを耳のひずみが作る差音で説明する考え（ヘルムホルツ 1863）、成分を同じだけずらすと聞こえる高さが動くこと（シャウテン、リツマ、カルドーゾ 1962）、自己相関で周期を読む考え（リックライダー 1951）は、いずれも既知である。聴覚の模型を作らない——三つの説明は最も素朴な形（整数の最大公約数、二乗のひずみ、波形の自己相関の最初の山）で計算するだけで、耳の中の仕組みは作らない（論文672 と同じ線）。聞こえる高さの値を置かない——実験で測られた高さの数は使わず、三つの説明が返す答だけを並べる。どの説明が正しいかも決めない。山を選ぶ規則は約束である——自己相関には同じ高さの山が 5 ms と 10 ms にあるので、「最大の 0.9 倍以上の山のうち最も短い遅れ」を規則として置いた。規則を変えれば答は変わる。成分の大きさはすべて等しい——位相は乱数で振り、大きさの違いは入れない。楽器を論じない——どの楽器の音がこの形かは主題ではない。既刊との関係：論文672 は、「二つの音」か「一つの揺れる音」かを決めているのが音ではなく聞き手であることを示し、射程注記で聴覚の模型を作らないとした——本稿はその席の隣に置く。模型を作らず、聞き手の側の問いを、成分の周波数から計算できる三つの答に分ける。論文582 は、倍音の並びを決めるのが閉じた端ではなく管の広がり方であることを示した——そこでは倍音の並びがどう作られるかを数えた。ここでは並んだ倍音から、そこに無い高さがどう読まれるかを数える。論文299 は、太鼓に音程が無いのは方程式のせいではなく境界のせいであることを示した——そこでは成分が整数の比に並ばず、高さが決まらなかった。ここでは整数の比に並んだ成分を同じだけずらして、その比を崩す。加えたのは、三つの説明がずらさない音ではどれも 200 Hz を返すことを示したこと、同じだけずらすと最大公約数は跳び、差音は動かず、自己相関は 203.106667 Hz から滑らかに動くことを数えたこと、標本化した音と 12 通りの位相で答が変わらないことを確かめたこと、分離子を「ずらしたとき答が跳ぶか、動かないか、滑らかに動くか」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：三つの成分 f_1・f_2・f_3 を同じ大きさで重ねた音 $x(t)$ を考える。そこに無い基音の高さの説明を、最も素朴な三つの形で書く。

$$f_{\mathrm{gcd}} = \gcd(f_1, f_2, f_3), \qquad f_{\mathrm{diff}} \in \{\, |f_i - f_j| \,\}, \qquad f_{\mathrm{ac}} = \frac{1}{\tau_1}, \quad R(\tau) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} \cos 2\pi f_i \tau$$

f_{diff} は、音を二乗するひずみ x^2 が作る差の周波数である。τ_1 は、$R(\tau)$ の山のうち、最大の 0.9 倍以上の高さをもつ山の、最も短い遅れとする（規則）。

問い：三つの説明は、どの音で同じ答を返し、どの操作で別の答を返すか。

2. ずらさない音

計算 2.1：400・600・800 Hz の音で、三つの説明の答と、波形そのものの成分を出した（波形は 48000 Hz で 0.5 秒）。

量	値
最大公約数	**200** Hz
二つの差（差音）	**200**・**400** Hz
自己相関の山（高さ）	**5.000000** ms（**1.000000**）、**10.000000** ms（**1.000000**）
規則で選んだ山	**5.000000** ms ⇒ **200.000000** Hz
波形に含まれる **200** Hz の成分	$\mathbf{3.752 \times 10^{-16}}$
波形に含まれる **400** Hz の成分	**0.500000**

> **観察 2.2**
>
> そのままの三つの成分では、三つの説明はどれも **200 Hz** を返す。波形の **200 Hz** の成分は丸め誤差の桁で、そこに基音は無いが、最大公約数も差音も自己相関も **200 Hz** を指す——だから、ずらさない音をいくら聞いても、三つの説明は分けられない。

> **観察 2.3**
>
> 自己相関の答は、山を選ぶ規則に依る。**5 ms** と **10 ms** の山は同じ高さ **1.000000** で、規則が無ければ **10 ms** の山から **100 Hz** とも読める——自己相関は「周期」を返すのではなく、候補の並びを返し、選ぶのは規則である。

3. 同じだけずらす

計算 3.1：三つの成分を同じだけずらし、三つの説明の答を出した。自己相関は規則で選んだ最初の山で、括弧はその高さである。

ずらし	最大公約数	二つの差	自己相関の最初の山	真ん中の成分 ÷3
0 Hz	200 Hz	200・400 Hz	200.000000 Hz（1.000000）	200.000000 Hz
10 Hz	10 Hz	200・400 Hz	203.106667 Hz（0.996703）	203.333333 Hz
20 Hz	20 Hz	200・400 Hz	206.218462 Hz（0.987241）	206.666667 Hz
30 Hz	10 Hz	200・400 Hz	209.333585 Hz（0.972256）	210.000000 Hz
50 Hz	50 Hz	200・400 Hz	215.567394 Hz（0.928236）	216.666667 Hz

> **観察 3.2**
>
> これが本稿の芯である。成分を同じだけずらすと、三つの答が別れる。最大公約数は 10・20・10・50 Hz と単調でなく跳び、差音は 200 Hz のまま動かず、自己相関は 203.106667・206.218462・209.333585・215.567394 Hz と、10 Hz ごとに 3.106667・3.111795・3.115123 ずつ滑らかに上がる——ずらすという一つの操作に、三つの説明は三つの別の振る舞いで答える。

> **観察 3.3**
>
> 自己相関の答は、真ん中の成分を 3 で割った値に近いが、一致しない。10 Hz ずらしで 203.106667 Hz 対 203.333333 Hz である。山の高さは 0.996703 から 0.928236 へ下がり、50 Hz ずらしでは次の山が 9.282702 ms と 10.717298 ms に同じ高さ 0.730278 で並ぶ——ずらすほど、選ばれる山と選ばれない山の差が縮み、規則の重みが増す。

4. 標本化した音と、でたらめな位相

計算 4.1：48000 Hz・0.5 秒で標本化し、位相を乱数で振った音の自己相関の山を数えた。

成分	自己相関の山（高さ）	規則で選んだ答
400・600・800 Hz	5.0001 ms（1.0000）、10.0001 ms（1.0000）	199.995555 Hz
410・610・810 Hz	4.9234 ms（0.9963）、9.8469 ms（0.9864）	203.112115 Hz

計算 4.2：410・610・810 Hz の音を位相 12 通りで作り、二乗したひずみ x^2 の 150〜260 Hz（1 Hz 刻み・1 秒）で最も強い周波数を探した。12 通りすべてで 200 Hz で、その強さは 203 Hz の強さの最小でも 5.815×10^{12} 倍だった。

> **観察 4.3**
>
> 標本化した音でも、でたらめな位相でも、答は変わらない。標本化した自己相関は式の山と −0.004445 Hz と +0.005449 Hz しか違わず、差音は位相に依らず 200 Hz である——三つの答の別れ方は、計算の仕方や位相の選び方の産物ではない。

5. 分離子

> **観察 5.1**
>
> 分離子は、成分を同じだけずらしたとき、答が跳ぶか、動かないか、滑らかに動くか。ずらさない音では三つとも 200 Hz、10 Hz ずらすと 10 Hz・200 Hz・203.106667 Hz に別れる——「無い基音が聞こえる理由」は、ずらさない音では三つのどれとも言え、ずらすまで決まらない。成分を同じだけずらすと聞こえる高さが動くことは知られているが、その値は本稿では置かない。

> **観察 5.2**
>
> 論文672・582・299 と並べる。672 は二つの音の聞き分けを決めるのが聞き手であることを、582 は倍音の並びを決めるものを、299 は整数の比に並ばない成分に高さが無いことを示した——ここでは整数の比に並んだ成分から読まれる高さを、ずらして比を崩すことで、三つの説明に分けた。

> **観察 5.3**
>
> 言わないこと。耳の中の仕組み、実験で測られた高さ、成分の大きさの違い、楽器、どの説明が正しいかは扱わない——示したのは、一つの操作が三つの説明を三つの振る舞いに分けるということである。

6. 点呼と結び

1. ずらさない音で三つとも 200 Hz（観察 2.2）：分けられない。

2. 自己相関の最初の山 **5.000000 ms**（計算 2.1）：**10 ms** にも同じ高さの山。
3. **400 Hz** の成分 **0.500000**（計算 2.1）：**200 Hz** は丸め誤差の桁。
4. **10 Hz** ずらしの最大公約数 **10 Hz**（観察 3.2）：跳ぶ。
5. 差音 **200 Hz**（観察 3.2）：動かない。
6. 自己相関 **203.106667 Hz**（観察 3.2）：本稿の芯・滑らかに動く。
7. **50 Hz** ずらしで **215.567394 Hz**（計算 3.1）：上がり続ける。
8. **10 Hz** ごとの増え **3.106667**（観察 3.2）：ほぼ一定。
9. 標本化して **203.112115 Hz**（計算 4.1）：計算の仕方に依らない。
10. 跳ぶか、動かないか、滑らかに動くか（観察 5.1）：分離子・論文672・582・299。

結び：無い基音が聞こえる理由の三つの説明は、成分を同じだけずらすと、跳ぶ・動かない・滑らかに動くに分かれる。400・600・800 Hz の音の波形に 200 Hz の成分は無いが、最大公約数も差音も自己相関の最初の山も 200 Hz を返し、ずらさない音では三つを分けられない——自己相関は 5 ms と 10 ms に同じ高さの山を持ち、選ぶのは規則である。三つの成分を同じだけずらすと、最大公約数は 10・20・10・50 Hz と跳び、差音は 200 Hz のまま動かず、自己相関は 203.106667 Hz から 215.567394 Hz まで滑らかに上がり、標本化した音と 12 通りの位相でもこの別れ方は変わらない——一つの操作に、三つの説明が三つの振る舞いで答える。分離子は、成分を同じだけずらしたとき、答が跳ぶか、動かないか、滑らかに動くかである。既刊との位置——論文672 は聞き分けを聞き手の側に置き、論文582 は倍音の並びを、論文299 は高さの無い成分を数えた。ここは並んだ倍音から読まれる高さを、三つの説明に分けた。正直に言えば——聴覚の模型は作っておらず、実験で測られた高さの値も、どの説明が正しいかも述べていない。

参考文献

1. Helmholtz, H. von (1863). *Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik*. Vieweg.
2. Licklider, J. C. R. (1951). A duplex theory of pitch perception. *Experientia*.
3. Schouten, J. F., Ritsma, R. J., & Cardozo, B. L. (1962). Pitch of the residue. *The Journal of the Acoustical Society of America*.
4. 山岸勇輝 (2026).『太鼓に音程が無いのは、境界のせいであって方程式のせいではない』[論文299]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171877
5. 山岸勇輝 (2026).『倍音の並びを決めるのは、閉じた端ではなく、そこからの管の広がり方である』[論文582]. Zenodo. 10.5281/zenodo.23014349
6. 山岸勇輝 (2026).『「二つの音」か「一つの揺れる音」かを決めているのは、音ではなく聞き手である』[論文672]. Zenodo. 10.5281/zenodo.23014751

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)