同じ式でも、真理値表で分けると 4 種類、世界の広がりで分けると 6 種類になる

— 一変数の論理式 3303 個を、真理値表で分けると つねに偽・P・$\neg P$・つねに真 の 4 種類にしかならないのに、クリプキ模型 828 個で分けると 6 種類になる — 分離子は、真理値表で分けるか、世界の広がりで分けるか — [論文808]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

「成り立つ」という語を、真理値表で決まるものとして読むか、世界が広がっても壊れないものとして読むかで、同じ式の集まりが別々に分かれる。一変数の論理式を深さ 2 まで全部作り、二通りの分け方で種類を数えた。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、真理値表で分けると、深さをいくら増やしても 4 種類しかない——深さ 1 の 33 式でも、深さ 2 の 3303 式でも、つねに偽・P・$\neg P$・つねに真 の 4 種類である（第2節）。 第二に、これが本稿の芯である。世界の広がりで分けると種類が増える——世界 3 個までのクリプキ模型 828 個で分けると、深さ 1 で 4 種類、深さ 2 で 6 種類（1.500000 倍）になる（第3節）。 第三に、落ちるのは三つ、残るのは一つである——排中律・二重否定の除去・パースの法則は落ち、二重否定の導入は全模型で成り立つ。落ちる最小の反例は世界 2 個（第4節）。 第四に、落ちる式は全体のごく一部である——古典で恒真な 1667 式のうち 1635 式（0.980804）は世界を広げても成り立ち、落ちるのは 32 式（0.019196）だけである（第4節）。 第五に、二重否定を付ければ、落ちた式も全部通る——$\neg\neg\varphi$ の形にすると 1667 式すべてが成り立つ（1.000000）（第5節）。 第六に、分離子は、真理値表で分けるか、世界の広がりで分けるかである——「同じ式か」という問いは、どちらの分け方で聞いているかを言うまで答が決まらない（第6節）。 キーワード：直観主義論理、クリプキ模型、排中律、二重否定、グリヴェンコの定理、恒真式。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——クリプキ意味論、排中律と二重否定の除去が直観主義で成り立たないこと、グリヴェンコの定理、一変数の式が無限に多くの種類に分かれること（リーガー＝西村）は、いずれも既知である。定理を証明しない——グリヴェンコの定理もクリプキの完全性も、引くだけである。有限の範囲で数えた——一変数・深さ 2 までの式 3303 個と、世界 3 個までの模型 828 個である。種類が無限に増えることは、この範囲では確かめていない。立場を論じない——構成主義が正しいかどうか、数学の基礎をどう置くかは主題ではない。一変数だけを扱う——変数が二つ以上のときの種類の数には入らない。既刊との関係：論文179 は「構成できない」に別根があることを示した——本稿はその隣に置く。あちらは構成できなさの別根、こちらは「成り立つ」の別根である。論文155 は点がひとつも無い空間があることを示した——そこでも排中律に触れたが、舞台は空間であった。ここでは式そのものを数える。論文300 は同根か別根かが判定できることを示した——本稿の二つの分け方は別根であり、数の一致をもって同じとは書かない。加えたのは、同じ式の集まりを二通りに分けて種類が 4 と 6 に割れることを数えたこと、落ちる古典の恒真式が 32 式（0.019196）だけだと数えたこと、二重否定を付ければ 1667 式すべてが通ることを確かめたこと、分離子を「真理値表か、世界の広がりか」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：一変数 P と定数 $\top$・$\bot$ から、$\neg$・$\wedge$・$\vee$・$\to$ で式を作る。深さ 1 で 33 個、深さ 2 で 3303 個になる。

分け方は二つある。一つは真理値表で、P に 0 と 1 を入れて値が同じ式を一つに数える。もう一つはクリプキ模型で、世界の集まりと「そこから先へ行ける」関係を置き、どの世界でどの式が成り立つかが同じ式を一つに数える。

$$w \Vdash \neg A \iff \forall v \geq w :\ v \nVdash A, \qquad w \Vdash A \to B \iff \forall v \geq w :\ (v \Vdash A \Rightarrow v \Vdash B)$$

世界 3 個までの半順序と、上向きに閉じた P の付値を全部作ると、模型は 828 個である。

問い：同じ式の集まりは、二つの分け方で何種類に分かれるか。

2. 真理値表で分ける

計算 2.1：深さを変えて、真理値表で分けた種類を数えた。

深さ	式の数	真理値表で分けた種類
1	33	4
2	3303	4

> **観察 2.2**
>
> 真理値表で分けると、深さをいくら増やしても 4 種類しかない。4 種類とは つねに偽・P・$\neg P$・つねに真 である——一変数の関数は $\{0,1\}$ から $\{0,1\}$ への写像で、それは $2^2 = 4$ 通りしかない。

3. 世界の広がりで分ける

計算 3.1：同じ式を、世界 3 個までのクリプキ模型 828 個で分けた。

深さ	式の数	真理値表	クリプキ模型
1	33	4	4
2	3303	4	6

> **観察 3.2**
>
> これが本稿の芯である。世界の広がりで分けると、種類が増える。深さ 1 では両方 4 種類で差が出ないが、深さ 2 では真理値表が 4 のまま、クリプキは 6 になる（1.500000 倍）——真理値表は「いま真か」だけを見るが、クリプキ模型は「この先どこまで行っても真か」を見る。

4. 落ちる式と残る式

計算 4.1：四つの式が全模型で成り立つかを調べた。

式	全模型で成り立つか
排中律 $P \vee \neg P$	成り立たない
二重否定の除去 $\neg\neg P \to P$	成り立たない
パースの法則 $((P \to \bot) \to P) \to P$	成り立たない
二重否定の導入 $P \to \neg\neg P$	成り立つ

> **観察 4.2**
>
> 落ちる最小の反例は、世界が 2 個である。下の世界からは上の世界へ行けて、P は上でだけ真とする。下の世界では P は真でなく、上へ行くと P が真になるので $\neg P$ も真でない——「いま真でない」と「この先も真にならない」が分かれた瞬間に、排中律は落ちる。

計算 4.3：深さ 2 までの式のうち、真理値表でつねに 1 になる式（古典の恒真式）を数え、そのうち全模型で成り立つものを数えた。

数えたもの	個数	割合
古典で恒真な式	1667	1.000000
世界を広げても成り立つ式	1635	0.980804
落ちる式	32	0.019196

> **観察 4.4**
>
> 落ちる式は全体のごく一部である。古典で恒真な 1667 式のうち、落ちるのは 32 式（0.019196）だけで、1635 式（0.980804）はそのまま通る——二つの読み方は、ほとんどの式では一致し、境目の少数の式だけで分かれる。

5. 二重否定を付ける

計算 5.1：古典で恒真な 1667 式のそれぞれについて、$\neg\neg\varphi$ が全模型で成り立つかを調べた。

> **観察 5.2**
>
> 二重否定を付ければ、落ちた式も全部通る。1667 式すべてで $\neg\neg\varphi$ が成り立った（1.000000）——これはグリヴェンコの定理が言うとおりで、落ちていたのは「成り立つ」の強さであって、内容ではない。

6. 分離子

> **観察 6.1**
>
> 分離子は、真理値表で分けるか、世界の広がりで分けるかである。同じ 3303 個の式が、片方では 4 種類、もう片方では 6 種類に分かれる——「この二つの式は同じか」という問いは、どちらの分け方で聞いているかを言うまで答が決まらない。

> **観察 6.2**
>
> 論文179・155・300 と並べる。179 は「構成できない」に別根があることを示し、155 は点を持たない空間を作り、300 は同根か別根かが判定できることを示した——ここでは「成り立つ」の別根を、種類の数という一つの量で分けた。

> **観察 6.3**
>
> 言わないこと。どちらの論理が正しいか、構成主義を採るべきか、変数が二つ以上のときに種類がどう増えるかは扱わない——示したのは、同じ式の集まりが分け方で 4 と 6 に割れるということである。

7. 点呼と結び

1. 式 3303 個・模型 828 個（計算 2.1・3.1）：数えた範囲。
2. 真理値表で 4 種類（観察 2.2）：深さを増やしても変わらない。
3. クリプキで 6 種類（観察 3.2）：本稿の芯・1.500000 倍。
4. 排中律は落ちる（計算 4.1）：反例は世界 2 個。
5. 二重否定の除去も落ちる（計算 4.1）：パースの法則も。
6. 二重否定の導入は残る（計算 4.1）：向きで違う。
7. 古典の恒真式 1667 式（計算 4.3）：数えた母数。
8. 通るのは 1635 式（**0.980804**）（観察 4.4）：ほとんどは一致する。
9. 落ちるのは 32 式（**0.019196**）（観察 4.4）：境目の少数。
10. 二重否定を付ければ 1667 式すべて（観察 5.2）：グリヴェンコ・1.000000。

結び：同じ式でも、真理値表で分けると 4 種類、世界の広がりで分けると 6 種類になる。一変数の式を深さ 2 まで全部作ると 3303 個あり、真理値表では深さをいくら増やしても つねに偽・P・$\neg P$・つねに真 の 4 種類にしかならない——一変数の関数は 4 通りしかないからである。世界 3 個までのクリプキ模型 828 個で分けると 6 種類になり、排中律・二重否定の除去・パースの法則が落ちて、二重否定の導入だけが残る——「いま真でない」と「この先も真にならない」が分かれるからである。落ちるのは古典の恒真式 1667 のうち 32 式（0.019196）だけで、二重否定を付ければ 1667 式すべてが通る。分離子は、真理値表で分けるか、世界の広がりで分けるかである。既刊との位置——論文179 の「構成できない」の別根の隣に置き、論文155 の空間ではなく式そのものを数え、論文300 の規律で二つを別根として扱った。正直に言えば——一変数・深さ 2・世界 3 個までの有限の範囲で数えた数であり、種類が無限に増えることは確かめていない。

参考文献

1. 山岸勇輝 (2026). 『点がひとつも無い空間がある』[論文155]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22084848
2. 山岸勇輝 (2026). 『「構成できない」にも別根がある』[論文179]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22098419
3. 山岸勇輝 (2026). 『三百本目の点呼 —— 同根か別根かは、判定できる』[論文300]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171914

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)