「必ず一つある」の先は、探索ではなく次数の分配が決めている

— 6 点の完全グラフを二色で塗る 32768 通りを全部作ると、単色の三角形は最小 2 個で、0 個も 1 個も無い — 分離子は、塗り分けを探すか、次数の分配だけで決まるか — [論文809]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

ラムゼーの定理は「6 人いれば、互いに知り合いの三人組か、互いに初対面の三人組が必ずある」と言う。本稿は、その「必ずある」を「少なくとも何組あるか」に強めたときに、その個数が何で決まるかを数える。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、5 点では 0 個にできる——1024 通りの塗り分けのうち 12 通り（0.011719）で単色の三角形が一つも無く、これが $R(3,3) > 5$ の中身である（第2節）。 第二に、6 点では最小が 2 個で、1 個の塗り分けは存在しない——32768 通りを全部作ると最小は 2 個、それを達成するのは 1760 通り（0.053711）、平均は 5.000000 個である（第2節）。 第三に、これが本稿の芯である。個数は赤の次数の分配だけで決まる——グッドマンの恒等式が 5 点と 6 点の 33792 通りすべてで一致した（第3節）。 第四に、だから下限は、塗り分けを一度も見ずに出る——次数の分配と握手の条件（次数の和が偶数）だけを使うと、6 点で 2 個、7 点で 4 個、12 点で 40 個（6 点の 20.000000 倍）である（第3節）。 第五に、探索の側は同じ範囲で爆発している——塗り分けの数は 6 点の 32768 通りから 12 点の 7.378698×10^{19} 通りへ増える（第4節）。 第六に、分離子は、塗り分けを探すか、次数の分配だけで決まるかである——「何個あるか」は探索の問いに見えて、下限の側は探索を要しない（第4節）。 キーワード：ラムゼーの定理、単色三角形、グッドマンの恒等式、次数の分配、全数え上げ、下限。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——ラムゼーの定理、$R(3,3)=6$、グッドマンによる単色三角形の個数の恒等式と下限は、いずれも既知である。恒等式を証明しない——5 点と 6 点の全数え上げで一致を確かめるだけである。二色・三角形だけを扱う——三色以上、四点以上の単色部分グラフ、非対称なラムゼー数は主題ではない。7 点以上は全数え上げをしていない——7 点以上について書くのは、次数の分配から出る下限だけである。ラムゼー数の値を主張しない——$R(4,4)$ や $R(5,5)$ の値にも範囲にも入らない。既刊との関係：論文302 は「必ず現れる」がいつ現れるかを教えないことを示し、射程注記で「ラムゼー数を計算しない——$R(5,5)$ の値を求めようとはしていない。求めるのに要る手間だけを数える」と明記した——本稿はその席の隣に置く。値ではなく個数の下限を、探索を一度もせずに次数の分配から出す。論文300 は同根か別根かが判定できることを示した——本稿の下限と探索の手間は別根であり、同じ舞台に立つだけである。加えたのは、5 点と 6 点の塗り分けを全部作って最小と平均と達成数を数えたこと、グッドマンの恒等式が 33792 通りすべてで一致することを確かめたこと、下限を 12 点まで並べて 20.000000 倍の伸びを測ったこと、分離子を「探索か、次数の分配か」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：n 点の完全グラフの辺を二色（赤と青）で塗る。三頂点の組で三辺が同じ色のものを単色三角形と呼ぶ。頂点 v につながる赤い辺の数を d_v と書く。

ラムゼーの定理の最初の場合は $R(3,3)=6$ で、6 点なら単色三角形が必ず一つある、5 点なら無いように塗れる、という主張である。

問い：「必ず一つある」を「少なくとも何個ある」に強めたとき、その個数は何で決まるか。

2. 全部の塗り分けを作る

計算 2.1：5 点（1024 通り）と 6 点（32768 通り）の塗り分けを全部作り、単色三角形の数を数えた。

点の数	塗り分け	最小	最小を達成する塗り分け	平均
5	1024	0 個	12 通り（0.011719）	2.500000 個
6	32768	2 個	1760 通り（0.053711）	5.000000 個

> **観察 2.2**
>
> 6 点の最小は 0 でも 1 でもなく 2 である。5 点では 12 通りが 0 個を達成し（五角形とその対角線を色分けする形）、6 点ではどう塗っても 2 個以上になる——「必ず一つある」という言い方は、実際に保証されている数より弱い。

3. 次数の分配だけで決まる

計算 3.1：グッドマンの恒等式が、作った全部の塗り分けで成り立つかを確かめた。

$$\#\{\text{単色三角形}\} = \binom{n}{3} - \frac{1}{2}\sum_{v} d_v\,(n-1-d_v)$$

5 点と 6 点の 33792 通りすべてで、数え上げた個数と恒等式の値が一致した。

> **観察 3.2**
>
> これが本稿の芯である。個数は赤の次数の分配だけで決まる。右辺に入るのは各頂点の赤い辺の数だけで、どの辺がどの色かという配置は入らない——同じ次数の分配を持つ塗り分けは、配置が違っても単色三角形の数が同じである。

計算 3.3：$d_v(n-1-d_v)$ の和を最大にする次数の分配を、次数の和が偶数という握手の条件のもとで選び、下限を出した。

点の数	5	6	7	8	9	10	11	12
下限（個）	0	2	4	8	12	20	28	40

> **観察 3.4**
>
> 下限は、塗り分けを一度も見ずに出る。12 点の下限 40 個は 6 点の 2 個の 20.000000 倍で、これを出すのに要ったのは次数の分配と握手の条件だけである——点の数が奇数のときは全部の頂点を $(n-1)/2$ にできず、そのぶんだけ下限が上がる。

4. 探索の側と、分離子

> **観察 4.1**
>
> 探索の側は同じ範囲で爆発している。塗り分けの数は 6 点で 32768 通り、12 点で 7.378698×10^{19} 通りになる——下限の側が握手の条件だけで済むのに対し、最小を達成する塗り分けを見つける側は数え上げが要る。

> **観察 4.2**
>
> 分離子は、塗り分けを探すか、次数の分配だけで決まるかである。「単色三角形は何個あるか」という一つの問いが、下限を言うだけなら閉じた式で、達成する塗り分けを出すなら数え上げで答えられる——同じ問いの中に、探索の要る側と要らない側が同居している。

> **観察 4.3**
>
> 論文302・300 と並べる。302 は $R(5,5)$ を総当たりする手間を数え、値を求めないと明記した——ここでは値ではなく個数の下限を、探索なしに出した。300 は同根か別根かが判定できることを示した——下限の式と探索の手間は別根であり、同じ舞台に立つだけである。

> **観察 4.4**
>
> 言わないこと。三色以上、四点以上の単色部分グラフ、$R(4,4)$ や $R(5,5)$ の値、7 点以上の全数え上げは扱わない——示したのは、個数の下限が次数の分配だけで決まるということである。

5. 点呼と結び

1. 5 点で 0 個が 12 通り（$\mathbf{0.011719}$）（計算 2.1）：$R(3,3) > 5$ の中身。
2. 6 点の最小は 2 個（観察 2.2）：0 も 1 も無い。
3. 達成は 1760 通り（$\mathbf{0.053711}$）（計算 2.1）：狭い。
4. 6 点の平均 5.000000 個（計算 2.1）：最小より大きい。
5. 恒等式が 33792 通りで一致（計算 3.1）：本稿の芯。

6. 入るのは次数だけ（観察 3.2）：配置は入らない。
7. 下限 6 点で 2・7 点で 4（計算 3.3）：探索なし。
8. 12 点で 40 個（20.000000 倍）（観察 3.4）：握手の条件が効く。
9. 塗り分けは 7.378698×10^{19} 通り（観察 4.1）：探索の側は爆発。
10. 探索か、次数の分配か（観察 4.2）：分離子・論文302・300。

結び：「必ず一つある」の先は、探索ではなく次数の分配が決めている。6 点の塗り分け 32768 通りを全部作ると単色三角形は最小 2 個で、0 個も 1 個も無く、5 点では 1024 通りのうち 12 通り（0.011719）が 0 個にできる——そこが $R(3,3)=6$ の境目である。個数はグッドマンの恒等式によって赤の次数の分配だけから決まり（33792 通りすべてで一致）、だから下限は塗り分けを一度も見ずに、6 点で 2 個、12 点で 40 個（20.000000 倍）と出る——右辺に配置が入らないからである。同じ範囲で塗り分けの数は 7.378698×10^{19} 通りへ増えており、分離子は、塗り分けを探すか、次数の分配だけで決まるかである。既刊との位置——論文302 の「ラムゼー数を計算しない」の席の隣に置き、論文300 の規律で下限と探索の手間を別根として扱った。正直に言えば——全数え上げをしたのは 6 点までで、7 点以上について言えるのは下限だけである。

参考文献

1. 山岸勇輝 (2026). 『三百本目の点呼 ── 同根か別根かは、判定できる』[論文300]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171914
2. 山岸勇輝 (2026). 『「必ず現れる」は、いつ現れるかを教えない』[論文302]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171988

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)