# 等号にちょうど乗る数は百万までに四個しかないのに、すぐ上の不等号は四分の一を占める

— 約数の和が $\sigma(n) = 2n$ をちょうど満たす数は $10^6$ までに 4 個（6・28・496・8128・割合 0.000004000）しかない — 分離子は、ちょうど等しいかを問うか、超えているかを問うか — [論文 810]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

*— From thinking to syncing. —*

## 要旨

完全数は「約数の和が自分自身の 2 倍にちょうど等しい数」として定義される。本稿は、その等号にちょうど乗る数と、すぐ上の不等号を満たす数の密度を、$10^6$ まで数え上げて並べる。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、等号に乗る数はきわめて稀である——$10^6$ までに 6・28・496・8128 の 4 個だけで、割合は 0.000004000 である（第2節）。 第二に、これが本稿の芯である。すぐ上の不等号は四分の一を占める——過剰数は 247545 個（0.247545）、不足数は 752450 個（0.752451）で、等号との比は 1 対 61886.2 である（第2節）。 第三に、境目の近くにも密度がある——$\sigma(n)/2n$ が 0.99 から 1.01 に入る数は 34212 個（0.034212）で、ちょうど等号の 8553.0 倍である（第3節）。 第四に、奇数では、不等号だけが現れた——奇数の過剰数は 1996 個あって最小は 945 なのに、奇数の完全数は $10^6$ までに一つも無い（第3節）。 第五に、等号に乗る数は、作れば作れる——$2^{p-1}(2^p-1)$ の形は $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31$ のすべてで $\sigma(N) = 2N$ を満たし、$p = 31$ で $N = 2305843008139952128$ になる（第4節）。 第六に、分離子は、ちょうど等しいかを問うか、超えているかを問うかである——同じ $\sigma$ を見ていても、等号は密度 0 に近く、不等号は正の密度を持つ（第5節）。 キーワード：完全数、過剰数、不足数、約数の和、ユークリッド＝オイラーの分類、密度。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——完全数・過剰数・不足数の定義、ユークリッド＝オイラーによる偶完全数の分類、過剰数の自然密度が存在すること（ダヴェンポート）は、いずれも既知である。数え上げた範囲は $10^6$ までである——そこから先は数えていない。奇数の完全数が存在しないとは言わない——$10^6$ までに一つも無かった、とだけ言う。存在の可否は未解決である。メルセンヌ素数を論じない——その個数が有限か無限かにも、素数判定の手順にも入らない。密度の値を主張しない——$0.247545$ は $10^6$ までの割合であり、自然密度の値そのものとしては書かない。既刊との関係：論文247 は「偶数と奇数で分かれる」が一つの現象ではないことを示し、射程注記でユークリッド＝オイラーの偶完全数の分類を既知として引いた——本稿はその席の隣に置く。あちらは偶奇で分かれる現象の別根、こちらは等号と不等号の密度である。論文300 は同根か別根かが判定できることを示した——等号の稀さと不等号の密度は同じ $\sigma$ の両側であり、数の一致をもって同根とは書かない。加えたのは、等号と不等号の個数を $10^6$ まで数えて比を $1$ 対 $61886.2$ と測ったこと、境目の $\pm 1$ パーセントの帯に $34212$ 個が入ることを数えたこと、奇数では過剰数だけが現れることを確かめたこと、分離子を「ちょうど等しいか、超えているか」に置いたことである。

## 1. 記法と問い

設定：$\sigma(n)$ を $n$ の約数の総和とする。$\sigma(n) = 2n$ を完全数、$\sigma(n) > 2n$ を過剰数、$\sigma(n) < 2n$ を不足数と呼ぶ。

$10^6$ まで篩で $\sigma$ を全部作り、三つの場合を数えた。

問い：等号にちょうど乗る数と、すぐ上の不等号を満たす数は、どちらがどれだけ多いか。

## 2. 数え上げ

計算 $2.1$：$2$ から $10^6$ までの $999999$ 個を三つに分けた。

| 場合 | 個数 | 割合 |
|---|---|---|
| $\sigma(n) = 2n$（完全数） | $4$ | $0.000004000$ |
| $\sigma(n) > 2n$（過剰数） | $247545$ | $0.247545$ |
| $\sigma(n) < 2n$（不足数） | $752450$ | $0.752451$ |

> **観察 2.2**
>
> これが本稿の芯である。等号は 4 個、すぐ上の不等号は四分の一を占める。完全数は 6・28・496・8128 の 4 個で、過剰数は 247545 個、比は 1 対 61886.2 である——同じ $\sigma$ を見ていても、等号を要求した瞬間に個数が五桁落ちる。

## 3. 境目のまわりと、奇数の側

計算 3.1：$\sigma(n)/2n$ が 0.99 から 1.01 の帯に入る数を数えた。

| 条件 | 個数 | 等号との比 |
|---|---|---|
| $\sigma(n)/2n = 1$ | 4 | 1 |
| $0.99 \le \sigma(n)/2n \le 1.01$ | 34212（0.034212） | 8553.0 |

> **観察 3.2**
>
> 境目の近くには密度がある。±1 パーセントの帯には 34212 個が入り、ちょうど等号の 8553.0 倍である——完全数の稀さは「$\sigma$ が $2n$ の近くを通らない」からではなく、「ちょうど等しい」を要求するからである。

計算 3.3：奇数だけを取り出して数えた。

| 奇数の場合 | 個数 | 最小 |
|---|---|---|
| 過剰数 | 1996 | 945 |
| 完全数 | 0 | — |

> **観察 3.4**
>
> 奇数では、不等号だけが現れた。奇数の過剰数は 945 を最小に 1996 個あるのに、奇数の完全数は $10^6$ までに一つも無い——「奇数では超えることさえ稀」ではない。超えはするが、ちょうどには乗らない。

## 4. 等号に乗る数を作る

計算 4.1：$2^p-1$ が素数になる $p$ について、$N=2^{p-1}(2^p-1)$ が $\sigma(N)=2N$ を満たすかを確かめた。

| $p$ | $N$ | $\sigma(N)=2N$ |
|---|---|---|
| 2 | 6 | 満たす |
| 7 | 8128 | 満たす |
| 13 | 33550336 | 満たす |
| 19 | 137438691328 | 満たす |
| 31 | 2305843008139952128 | 満たす |

> **観察 4.2**
>
> 等号に乗る数は、探さなくても作れる。$p=2,3,5,7,13,17,19,31$ の 8 通りすべてで $\sigma(N)=2N$ が成り立った——稀であることと、作り方が無いことは別である。

## 5. 分離子

> **観察 5.1**
>
> 分離子は、ちょうど等しいかを問うか、超えているかを問うかである。同じ $\sigma$ の上で、等号の側は $10^6$ までに 4 個（0.000004000）、不等号の側は 247545 個（0.247545）である——等号は境目であって、境目そのものには密度が乗らない。

> **観察 5.2**
>
> 論文247・300 と並べる。247 は「偶数と奇数で分かれる」が一つの現象ではないことを示し、偶完全数の分類を既知として引いた——ここでは偶奇ではなく、等号と不等号で分けた。300 は同根か別根かが判定できることを示した——等号の稀さと不等号の密度は、同じ量の両側である。

> **観察 5.3**
>
> 言わないこと。奇数の完全数が存在しないこと、メルセンヌ素数が無限にあること、自然密度の厳密な値は扱わない——示したのは、$10^6$ までの数え上げで等号と不等号の密度が五桁違うということである。

## 6. 点呼と結び

1. 完全数 4 個（**0.000004000**）（計算 2.1）：**6・28・496・8128**。
2. 過剰数 247545 個（**0.247545**）（計算 2.1）：本稿の芯。
3. 不足数 752450 個（**0.752451**）（計算 2.1）：残り全部。
4. 比 1 対 **61886.2**（観察 2.2）：五桁の差。
5. 帯に 34212 個（**0.034212**）（計算 3.1）：境目の近くは混んでいる。
6. 等号の **8553.0** 倍（観察 3.2）：要求が「ちょうど」だから稀。
7. 奇数の過剰数 1996 個（計算 3.3）：最小 945。
8. 奇数の完全数 0 個（計算 3.3）：$10^6$ までの事実。
9. $p = 31$ で $N = 2305843008139952128$（計算 4.1）：作れば作れる。
10. ちょうど等しいか、超えているか（観察 5.1）：分離子・論文247・300。

結び：等号にちょうど乗る数は百万までに四個しかないのに、すぐ上の不等号は四分の一を占める。$\sigma(n) = 2n$ を満たすのは 6・28・496・8128 の 4 個（0.000004000）で、$\sigma(n) > 2n$ は 247545 個（0.247545）、比は 1 対 61886.2 である——等号を要求した瞬間に個数が五桁落ちる。境目の ±1 パーセントの帯には 34212 個（0.034212）が入り、ちょうど等号の 8553.0 倍あるので、稀さの理由は「$\sigma$ が近くを通らない」ことではない——要求が「ちょうど」だからである。奇数では過剰数が 1996 個（最小 945）ある一方、完全数は $10^6$ までに一つも無く、$2^{p-1}(2^p-1)$ の形は 8 通りすべてで等号を満たした。分離子は、ちょうど等しいかを問うか、超えているかを問うかである。既刊との位置——論文247 の偶完全数の席の隣に置き、論文300 の規律で等号と不等号を同じ量の両側として扱った。正直に言えば——数えたのは $10^6$ までであり、奇数の完全数が存在しないとは言っていない。

## 参考文献


1. 山岸勇輝 (2026). 『「偶数と奇数で分かれる」は、一つの現象ではない』[論文247]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22159832
2. 山岸勇輝 (2026). 『三百本目の点呼 ── 同根か別根かは、判定できる』[論文300]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171914

*— From thinking to syncing. —*

**山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)**

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)