連分数の周期は、近似のしやすさではなく、二次方程式の根であることの印である

— 2 から 50 までの平方数でない 43 個の $\sqrt{n}$ は全部が周期を持ち（長さは最小 1・最大 12・平均 3.441860）、黄金比は 100 項まで全部 1 — 分離子は、周期があるか、一度きりの大きい部分商か —

[論文811]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

連分数には「周期を持つもの」と「持たないもの」があり、π の 355/113 のようによく当たる近似も連分数から出る。本稿は、周期が何の印であり、よく当たる近似が何から来るのかを、実際に展開して数える。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、平方根は例外なく周期を持つ——2 から 50 までの平方数でない 43 個の $\sqrt{n}$ はすべて周期を持ち、長さは最小 1・最大 12・平均 3.441860 である（第2節）。 第二に、これが本稿の芯である。周期は二次方程式の根であることの印である——周期 $[2]$・$[1,2]$・$[1,1,1,4]$ から数を作り直すと $\sqrt{2}$・$\sqrt{3}$・$\sqrt{7}$ に戻り、x^2-n の残差は 10^{-16} の桁に収まる（第3節）。 第三に、周期を持たない数もある——e の連分数は 100 項まで見ても長さ 1 から 30 のどの周期も破れ、部分商の最大は 66 になる（第4節）。 第四に、よく当たる近似は、周期ではなく一度きりの跳ねから来る——π の 355/113 の差 2.667642×10^{-7} は 22/7 の差 1.264489×10^{-3} の 2.109660×10^{-4} 倍で、直前の部分商が 292 だからである（第4節）。 第五に、黄金比は反対の端にいる——連分数が 100 項まで全部 1 で、跳ねが一度も来ない（第2節）。 第六に、分離子は、周期があるか、一度きりの大きい部分商かである——「連分数がきれいだ」という言い方は、どちらを指しているかで意味が変わる（第5節）。 キーワード：連分数、周期、二次無理数、部分商、近似分数、ラグランジュの定理。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——連分数展開、二次無理数の連分数が周期的であること（ラグランジュ）、π と e の連分数の形、$355/113$ の当たりは、いずれも既知である。定理を証明しない——ラグランジュの定理は引くだけで、周期から二次無理数を作り直して確かめるにとどめる。周期を持たないことを証明しない——e について言えるのは、100 項の範囲で長さ 30 までのどの周期も成り立たない、という事実だけである。超越性に入らない——π や e が超越数であることは使わない。近似のしやすさの大小は扱わない——どの数が最も近似しにくいか、$q|q\alpha - p|$ の下限がどこに止まるかには入らない。既刊との関係：論文319 は暦が近似を三段重ねたものであることを示し、射程注記で連分数による近似を既知として引いた——本稿はその席の隣に置く。あちらは暦の近似の段、こちらは周期が何の印かという一点である。論文539 は歯車の歯数を決めたのが天文ではなく連分数であることを示した——そこでは連分数は道具であった。ここでは連分数そのものの形を見る。論文213 は「戻ってくる」に別根があることを示した——あちらは軌道の戻り、こちらは展開の周期であり、同じ語の別の舞台である。加えたのは、43 個の $\sqrt{n}$ の周期の長さを測って平均 3.441860 を出したこと、周期から数を作り直して残差を測ったこと、$355/113$ の当たりを $22/7$ との比 2.109660×10^{-4} で測り、その出所を一度きりの部分商 292 に帰したこと、分離子を「周期か、一度きりの跳ねか」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：実数 x の連分数展開を $x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}}$ と書き、$a_0, a_1, a_2, \ldots$ を部分商と呼ぶ。途中で打ち切って得られる分数 p/q を近似分数と呼ぶ。

倍精度では 40 項ほどで展開が壊れるので、有効桁 120 の多倍長で計算した。黄金比の部分商が 100 項まで全部 1 になることを、精度そのものの検査として使った。

問い：連分数の周期は何の印か。よく当たる近似はどこから来るのか。

2. 周期を持つ数

計算 2.1：$\sqrt{n}$ の連分数を整数演算で展開し、周期の長さを測った。

数	連分数のはじめ	周期の長さ
黄金比	$[1,1,1,1,1,\ldots]$	1
$\sqrt{2}$	$[1,2,2,2,\ldots]$	1
$\sqrt{3}$	$[1,1,2,1,2,\ldots]$	2
$\sqrt{7}$	$[2,1,1,1,4,\ldots]$	4
$\sqrt{13}$	$[3,1,1,1,1,6,\ldots]$	5
$\sqrt{19}$	$[4,2,1,3,1,2,8,\ldots]$	6

> **観察 2.2**
>
> 平方根は例外なく周期を持つ。2 から 50 までの平方数でない 43 個すべてが周期を持ち、長さは最小 1・最大 12・平均 3.441860 である——黄金比は周期 1 で部分商がすべて 1 という、跳ねの一度も来ない端にいる。

3. 周期から数を作り直す

計算 3.1：周期だけを与えて、$x = a_0 + 1/y$、$y =$（周期を無限に繰り返したもの）という不動点を数値で解き、元の数に戻るかを見た。

与えた周期	作り直した数	$x^2 - n$ の残差
$[2]$	1.414213562373	4.441×10^{-16}
$[1,2]$	1.732050807569	4.441×10^{-16}
$[1,1,1,4]$	2.645751311065	8.882×10^{-16}

> **観察 3.2**
>
> これが本稿の芯である。周期は二次方程式の根であることの印である。周期を繰り返す式は自分自身に戻る形をしているので、その不動点は分数式の等式になり、整理すると二次方程式になる——ラグランジュの定理が言うのはこのことで、周期があることと二次無理数であることは同じ一つの事実の二つの言い方である。

4. 周期を持たない数と、一度きりの跳ね

計算 4.1：π と e の連分数を展開した。

数	連分数
π	$[3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14]$
e	$[2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, \ldots]$

e は 100 項まで見ても長さ 1 から 30 のどの周期も成り立たず、部分商の最大は 66 になる。$\sqrt{2}$ の部分商の最大は 2、黄金比は 1 である。

計算 4.2：π の近似分数の差を並べた。

近似分数	値	π との差
$22/7$	3.142857142857	1.264489×10^{-3}
$333/106$	3.141509433962	8.321963×10^{-5}
$355/113$	3.141592920354	2.667642×10^{-7}
$103993/33102$	3.141592653012	5.778906×10^{-10}

> **観察 4.3**
>
> よく当たる近似は、周期ではなく一度きりの跳ねから来る。$355/113$ の差は $22/7$ の差の 2.109660×10^{-4} 倍で、その直前の部分商が 292 である——次の部分商が大きいほど、そこで打ち切った近似分数がよく当たる。π の 292 は一度きりで、周期ではない。

5. 分離子

> **観察 5.1**
>
> 分離子は、周期があるか、一度きりの大きい部分商かである。$\sqrt{7}$ は周期 4 を持つが部分商は 4 までしか大きくならず、π は周期を持たないのに 292 が一度出る——「連分数がきれいだ」という言い方は、規則正しさを指すのか、よく当たる近似を指すのかで、別のことを言っている。

> **観察 5.2**
>
> 論文319・539・213 と並べる。319 は暦を三段の近似として読み、539 は歯数が連分数で決まることを示し、213 は「戻ってくる」の別根を分けた——ここでは連分数そのものの周期を見て、それが二次方程式の根であることの印だと確かめた。

> **観察 5.3**
>
> 言わないこと。ラグランジュの定理の証明、e が周期を持たないことの証明、超越性、近似のしやすさの大小は扱わない——示したのは、周期が何の印であり、よく当たる近似がどこから来るかである。

6. 点呼と結び

1. 43 個の $\sqrt{n}$ が全部周期を持つ（観察 2.2）：例外なし。
2. 周期の長さの平均 3.441860（観察 2.2）：最小 1・最大 12。
3. 黄金比は 100 項まで全部 1（計算 2.1）：跳ねが来ない端。
4. 周期 [2] から 1.414213562373（計算 3.1）：$\sqrt{2}$ に戻る。
5. 残差 10^{-16} の桁（計算 3.1）：本稿の芯・二次方程式の根。
6. e は長さ 30 までどの周期も破れる（計算 4.1）：部分商の最大 66。
7. 22/7 の差 1.264489×10^{-3}（計算 4.2）：はじめの当たり。
8. 355/113 の差 2.667642×10^{-7}（計算 4.2）：よく当たる。
9. 比 2.109660×10^{-4}（観察 4.3）：出所は 292。
10. 周期か、一度きりの跳ねか（観察 5.1）：分離子・論文319・539・213。

結び：連分数の周期は、近似のしやすさではなく、二次方程式の根であることの印である。2 から 50 までの平方数でない 43 個の $\sqrt{n}$ は全部が周期を持ち（長さは平均 3.441860）、周期だけから数を作り直すと $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}$ に戻って x^2-n の残差は 10^{-16} の桁に収まる——周期を繰り返す式は自分自身に戻る形をしており、その不動点は二次方程式になるからである。いっぽう π も e も周期を持たず（e は 100 項で長さ 30 までのどの周期も破れる）、π のよく当たる近似 $355/113$（差 2.667642×10^{-7}・$22/7$ の差の 2.109660×10^{-4} 倍）は、周期ではなく一度きりの部分商 292 から来ている——次の部分商が大きいほど、そこで打ち切った近似がよく当たる。分離子は、周期があるか、一度きりの大きい部分商かである。既刊との位置——論文319 の連分数の席の隣に置き、論文539 が道具として使った連分数そのものの形を見て、論文213 の「戻ってくる」の別根とは舞台を分けた。正直に言えば——ラグランジュの定理は引くだけで証明しておらず、e が周期を持たないことも 100 項の範囲の事実にとどまる。

参考文献

1. 山岸勇輝 (2026). 『「戻ってくる」には別根がある』[論文213]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22119380
2. 山岸勇輝 (2026). 『暦は、近似を三段重ねたものである』[論文319]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22208933
3. 山岸勇輝 (2026). 『歯数を決めたのは天文ではなく、連分数である』[論文539]. Zenodo. 10.5281/zenodo.23014129

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)