# 近似のしやすさを決めているのは、部分商が有界か非有界かである

— 近似分数 $p/q$ に対する $q|q\alpha - p|$ は、黄金比で $0.447214$（$= 1/\sqrt{5}$）、$\sqrt{2}$ で $0.353553$、$\sqrt{3}$ で $0.288675$、$\sqrt{5}$ で $0.223607$ に落ち着く — 分離子は、部分商が有界か非有界か — [論文812]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

*— From thinking to syncing. —*

## 要旨

「この数は近似しやすい」と言うとき、実際に効いているのは何かを数える。近似分数 $p/q$ ごとに $q|q\alpha - p|$ を計算し、どこで止まるかを六つの数で比べた。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、部分商が有界な数では、正の値に止まる——黄金比で $0.447214$、$\sqrt{2}$ で $0.353553$、$\sqrt{3}$ で $0.288675$、$\sqrt{5}$ で $0.223607$ である（第2節）。 第二に、その値は閉じた式と一致する——$1/\sqrt{5} = 0.447214$、$1/(2\sqrt{2}) = 0.353553$、$1/\sqrt{12} = 0.288675$ との差はいずれも $10^{-16}$ の桁である（第2節）。 第三に、これが本稿の芯である。部分商が非有界な数では、下へ落ち続ける——$\pi$ は $0.003406$ まで、$e$ は項を 40 から 60 へ伸ばすと 0.037012 から $0.024383$ へ下がる（第3節）。 第四に、分かれ目は数の正体ではなく、部分商の大きさである——部分商の最大は黄金比 $1$・$\sqrt{2}$ $2$・$\sqrt{3}$ $2$・$\sqrt{5}$ $4$ に対し、$\pi$ は 292、$e$ は 40 まで伸びる（第3節）。 第五に、黄金比が端にいる——その値 $0.447214$ はフルヴィッツの限界 $1/\sqrt{5}$ と一致し、$e$ の 0.024383 の $18.341223$ 倍である（第4節）。 第六に、分離子は、部分商が有界か非有界かである——「無理数はどれも同じくらい近似しにくい」は成り立たず、分けるのは数の名前ではなく展開の形である（第4節）。 キーワード：ディオファントス近似、連分数、部分商、フルヴィッツの定理、黄金比、近似分数。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——ディオファントス近似、連分数の近似分数が最良近似であること、フルヴィッツの定理と $1/\sqrt{5}$ が最良の定数であること、$\pi$ と $e$ の連分数の形は、いずれも既知である。定理を証明しない——フルヴィッツの定理は引くだけで、黄金比で値が $1/\sqrt{5}$ に一致することを確かめるにとどめる。非有界性を証明しない——$\pi$ の **292** と $e$ の伸びる部分商は、**25** 項・**60** 項の範囲で見た事実である。無理数度に入らない——リウヴィル数、超越性、無理数度の測り方は主題ではない。近似分数以外を扱わない——$q$ を全部動かした最良近似ではなく、連分数の近似分数だけを見る。既刊との関係：論文**811** は連分数の周期が二次方程式の根であることの印だと示した——本稿はその隣に置く。周期を持つ数は部分商が有界なので、ここでの下限が正の値に止まる側にそのまま入る。論文**176** は「小さい」が二つあって両立しないことを示した——本稿も「近似しやすい」の二つの読み方を分ける。論文**300** は同根か別根かが判定できることを示した——**0.447214** などの値は体系の他の編にも普遍の定数として現れるが、中身は別であり同根とは書かない。加えたのは、六つの数で $q|q\alpha - p|$ を多倍長で測って閉じた式との差を $10^{-16}$ の桁と確かめたこと、部分商の最大と下限の止まり方の対応を並べたこと、黄金比の値が $e$ の **18.341223** 倍だと測ったこと、分離子を「部分商が有界か非有界か」に置いたことである。

## 1. 記法と問い

設定：無理数 $\alpha$ の連分数の近似分数を $p/q$ とし、近似の良さを $q|q\alpha - p|$ で測る。この量が小さいほど、分母 $q$ の割によく当たっている。

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{c\,q^2} \quad \Longleftrightarrow \quad q\,|q\alpha - p| < \frac{1}{c}$$

倍精度では **40** 項ほどで連分数が壊れるので、有効桁 **120** の多倍長で計算した。

問い：この量はどこで止まるのか。止まり方を決めているのは何か。

## 2. 部分商が有界な数

計算 **2.1**：近似分数を **40** 項ぶん作り、$q|q\alpha - p|$ の落ち着く値を閉じた式と比べた。

| 数 | 落ち着く値 | 閉じた式 | 差 |
|---|---|---|---|
| 黄金比 | **0.447214** | $1/\sqrt{5} = 0.447214$ | **0** |
| $\sqrt{2}$ | **0.353553** | $1/(2\sqrt{2}) = 0.353553$ | $5.551 \times 10^{-17}$ |
| $\sqrt{3}$ | **0.288675** | $1/\sqrt{12} = 0.288675$ | $5.551 \times 10^{-17}$ |
| $\sqrt{5}$ | **0.223607** | — | — |

> **観察 2.2**
>
> 部分商が有界な数では、正の値に止まる。どれも下へ落ちずに一定の値のまわりに落ち着き、閉じた式との差は $10^{-16}$ の桁である——これらはみな連分数が周期を持つ数で、部分商が 4 を超えない。

## 3. 部分商が非有界な数

計算 3.1：同じ量を $\pi$ と $e$ で測り、部分商の最大と並べた。

| 数 | $q\lvert q\alpha - p\rvert$ の最小 | 部分商の最大 |
|---|---|---|
| 黄金比（40 項） | 0.447214 | 1 |
| $\sqrt{2}$（40 項） | 0.353553 | 2 |
| $\sqrt{5}$（40 項） | 0.223607 | 4 |
| $\pi$（25 項） | 0.003406 | 292 |
| $e$（40 項） | 0.037012 | 26 |
| $e$（60 項） | 0.024383 | 40 |

> **観察 3.2**
>
> これが本稿の芯である。部分商が非有界な数では、下へ落ち続ける。$e$ は項を 40 から 60 へ伸ばすだけで最小が 0.037012 から 0.024383 へ下がり、$\pi$ は一度の 292 で 0.003406 まで落ちる——大きい部分商は、その直前で打ち切った近似分数を当たりにするので、部分商が伸び続ける限り下限は止まらない。

> **観察 3.3**
>
> 分かれ目は数の正体ではなく、展開の形である。$\sqrt{2}$ も $\pi$ も同じく無理数だが、部分商の最大は 2 と 292 で、止まり方が変わる——「無理数はどれも同じくらい近似しにくい」は成り立たない。

## 4. 端にいる数と、分離子

> **観察 4.1**
>
> 黄金比が端にいる。その値 **0.447214** はフルヴィッツの定理の定数 $1/\sqrt{5}$ と一致し、$e$ の **60** 項までの最小 **0.024383** の **18.341223** 倍である——部分商が全部 **1** ということは、跳ねが一度も来ないということで、それが最も近似しにくい形である。

> **観察 4.2**
>
> 分離子は、部分商が有界か非有界かである。周期を持つ数（二次無理数）は部分商が有界なので正の値に止まり、$\pi$ や $e$ は部分商が伸びるので落ち続ける——「近似しやすい」という言葉は、数の名前ではなく展開の形に付いている。

> **観察 4.3**
>
> 論文**811・176・300** と並べる。**811** は周期が二次方程式の根であることの印だと示した——周期を持つ数はここで有界の側に入り、二つの結果は同じ境目の両面である。**176** は「小さい」が二つあって両立しないことを示し、**300** は同根か別根かが判定できることを示した——**0.447214** のような値は体系の他の編にも普遍の定数として出るが、中身は別である。

> **観察 4.4**
>
> 言わないこと。フルヴィッツの定理の証明、$\pi$ や $e$ の部分商が非有界であることの証明、無理数度、超越性は扱わない——示したのは、止まり方を分けているのが部分商の有界性だということである。

## 5. 点呼と結び

1. 黄金比 **0.447214**（計算 2.1）：$1/\sqrt{5}$ と差 **0**。
2. $\sqrt{2}$ **0.353553**（計算 2.1）：$1/(2\sqrt{2})$。
3. $\sqrt{3}$ **0.288675**（計算 2.1）：$1/\sqrt{12}$。
4. $\sqrt{5}$ **0.223607**（計算 2.1）：有界の側。

5. $\pi$ **0.003406**（計算 3.1）：部分商 **292**。
6. $e$ は **0.037012** から **0.024383** へ（観察 3.2）：本稿の芯・落ち続ける。
7. 部分商の最大 **1・2・4**（計算 3.1）：有界の側。
8. 部分商の最大 **292・40**（計算 3.1）：非有界の側。
9. 黄金比は $e$ の **18.341223** 倍（観察 4.1）：最も近似しにくい。
10. 有界か、非有界か（観察 4.2）：分離子・論文**811・176・300**。

結び：近似のしやすさを決めているのは、部分商が有界か非有界かである。$q|q\alpha - p|$ は黄金比で **0.447214**、$\sqrt{2}$ で **0.353553**、$\sqrt{3}$ で **0.288675**、$\sqrt{5}$ で **0.223607** に落ち着き、閉じた式との差は $10^{-16}$ の桁である——どれも部分商が **4** を超えない数である。いっぽう $\pi$ は **0.003406** まで、$e$ は項を **40** から **60** へ伸ばすだけで **0.037012** から **0.024383** へ下がる——大きい部分商がその直前の近似分数を当たりにするので、部分商が伸び続ける限り下限は止まらない。黄金比の **0.447214** はフルヴィッツの限界 $1/\sqrt{5}$ と一致し、$e$ の **0.024383** の **18.341223** 倍で、最も近似しにくい端にいる。分離子は、部分商が有界か非有界かである。既刊との位置——論文**811** の周期の結果の隣に置き（周期を持つ数はここで有界の側に入る）、論文**176** の「小さい」の別根の隣に置き、論文**300** の規律で普遍の定数の一致を同根と書かなかった。正直に言えば——フルヴィッツの定理は引くだけで証明しておらず、$\pi$ と $e$ の部分商の非有界性も **25** 項・**60** 項の範囲で見た事実にとどまる。

## 参考文献


1. 山岸勇輝 (2026). 『「小さい」は二つあって、両立しない』[論文176]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22097994
2. 山岸勇輝 (2026). 『三百本目の点呼 ── 同根か別根かは、判定できる』[論文300]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171914
3. 山岸勇輝 (2026). 『連分数の周期は、近似のしやすさではなく、二次方程式の根であることの印である』[論文811]. Zenodo. 10.5281/zenodo.23015470


*— From thinking to syncing. —*


**山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)**



© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)