チェビシェフ点の最適性は、比べて分かった優劣ではなく、等号で決まっている

— 節の多項式の $[-1,1]$ での最大は、チェビシェフ点では 2^{1-n} に比 1.000000 で一致し、無作為に取った節 300 通りは最小でも 3.559066 倍で一つも下回らない — 分離子は、比べて出た優劣か、等号で決まる下限か — [論文818]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

補間の節をどこに取るかで、誤差の出方が変わる。本稿は、チェビシェフ点の良さが「試したら良かった」ではなく「それ以上良くできない」という等号であることを、数で確かめる。新しい定理も法則も主張しない。第一に、チェビシェフ点では、節の多項式の最大が閉じた式にちょうど乗る——2^{1-n} との比は $n=5,9,13,17,21$ のすべてで 1.000000 である（第2節）。第二に、その値は n とともに指数で下がる——$n=13$ で 2.441406×10^{-4}、$n=21$ で 9.536743×10^{-7} である（第2節）。第三に、等間隔の節はこれより大きく、差は n とともに開く——$n=5$ で 1.815716 倍、$n=13$ で 16.416632 倍、$n=21$ で 245.018559 倍である（第3節）。第四に、これが本稿の芯である。無作為に取った節も、下限を一度も割らない——$n=9$ で 300 通り試して、最小でも下限の 3.559066 倍、下回った回数は 0 である（第3節）。第五に、だから「チェビシェフ点が良い」は、比べた結果ではない——2^{1-n} は誰も下回れない床であり、チェビシェフ点はそこにちょうど触れている（第4節）。第六に、分離子は、比べて出た優劣か、等号で決まる下限かである——「良い」という言葉の中身が、二つの場合で別である（第4節）。 キーワード：チェビシェフ点、節の多項式、最小最大、下限、等間隔、補間。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——チェビシェフ多項式、モニックな多項式の最大値が 2^{1-n} で最小になること、その最小を達成するのがチェビシェフ点であることは、いずれも既知である。定理を証明しない——最適性の証明には入らず、等号の一致と、無作為な節が下限を割らないことを確かめるにとどめる。区間を固定する——$[-1,1]$ だけを見る。別の区間への写し方は扱わない。補間の誤差に入らない——ルンゲ現象や収束の条件は主題ではない。重みを扱わない——重み付きの最良近似、第二種のチェビシェフ点、端点を含む取り方は扱わない。既刊との関係：論文329 は、同じ点を使っても方法によって片方は発散し片方は収束することを示し、射程注記で「ルンゲの 1901 年の例、チェビシェフ点、三次スプライン、ルベーグ定数はいずれも標準的である」と明記した——本稿はその席の隣に置く。あちらは同じ点の上で二つの方法を比べ、こちらは点の取り方そのものの下限を見る。論文300 は同根か別根かが判定できることを示した——「比べて良かった」と「それ以上良くできない」は別根であり、同じ「最適」という語の下に置かない。加えたのは、節の多項式の最大を五つの n で測って 2^{1-n} との比を 1.000000 と確かめたこと、等間隔との開きが n とともに 1.815716 倍から 245.018559 倍へ広がることを測ったこと、無作為な節 300 通りが一度も下限を割らないことを確かめたこと、分離子を「比べた優劣か、等号の下限か」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：区間 $[-1,1]$ に n 個の節 $x_1,\dots,x_n$ を取り、次の多項式を考える。

$$w(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i),\qquad M(\{x_i\})=\max_{x\in[-1,1]}|w(x)|$$

w は最高次の係数が 1 の多項式（モニック）で、補間の誤差の中に現れる。節の取り方で M がどこまで小さくできるかを見る。

問い：M には下限があるのか。あるとして、チェビシェフ点はそこに触れているのか。

2. チェビシェフ点で測る

計算 2.1：チェビシェフ点 $x_k=\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}$ で M を測り、2^{1-n} と比べた。

n	測った M	2^{1-n}	比
5	6.250000×10^{-2}	6.250000×10^{-2}	1.000000
13	2.441406×10^{-4}	2.441406×10^{-4}	1.000000
21	9.536743×10^{-7}	9.536743×10^{-7}	1.000000

> **観察 2.2**
>
> ちょうど乗る。五つの n すべてで比が 1.000000 である——チェビシェフ点での w は、区間の中で同じ高さの山と谷を $n+1$ 回繰り返す形になり、その高さが 2^{1-n} である。

3. ほかの節と比べる

計算 3.1：等間隔の節で同じ量を測った。

n	等間隔の M	チェビシェフの何倍か
5	1.134823×10^{-1}	1.815716
13	4.007967×10^{-3}	16.416632
21	2.336679×10^{-4}	245.018559

計算 3.2：$n = 9$ で、区間の中から無作為に節を取ることを 300 通り試した。

測ったもの	値
下限 2^{1-9}	3.906250×10^{-3}
300 通りのうち最小の M	1.390260×10^{-2}
下限との比	3.559066
下限を下回った回数	0

> **観察 3.3**
>
> これが本稿の芯である。無作為に取っても、下限を一度も割らない。300 通りの最小でも下限の 3.559066 倍で、下回った回数は 0 である——偶然に良い節を引くことはあっても、床を突き抜けることはない。

4. 分離子

観察 4.1

分離子は、比べて出た優劣か、等号で決まる下限かである。等間隔との比（**1.815716** 倍から **245.018559** 倍）は比べて出た優劣だが、2^{1-n} は比べる相手を持たない床である——「チェビシェフ点が最良である」は、試した中で一番という意味ではなく、床に触れているという意味である。

観察 4.2

床があることと、そこに触れる取り方があることは別である。下限が在るだけなら、それを達成する節が在るとは限らない——ここでは両方が成り立ち、比が **1.000000** で一致した。

観察 4.3

論文**329**・**300** と並べる。**329** は同じ点の上で二つの方法が千倍に発散し千分の一に収束することを示した——そこでは点が同じで方法が違い、ここでは方法が同じで点が違う。**300** は同根か別根かが判定できることを示した——「比べて良い」と「それ以上良くできない」は別根である。

観察 4.4

言わないこと。最適性の証明、ルンゲ現象、ルベーグ定数、重み付きの最良近似は扱わない——示したのは、良さの中身が等号だということである。

5. 点呼と結び

1. $n = 13$ で $\mathbf{2.441406} \times 10^{-4}$（計算 2.1）：$2^{1-n}$ に一致。
2. $n = 21$ で $\mathbf{9.536743} \times 10^{-7}$（計算 2.1）：指数で下がる。
3. 比はすべて **1.000000**（観察 2.2）：ちょうど乗る。
4. 等間隔は $n = 5$ で **1.815716** 倍（計算 3.1）：小さい n では近い。
5. $n = 13$ で **16.416632** 倍（計算 3.1）：開き始める。
6. $n = 21$ で **245.018559** 倍（計算 3.1）：n とともに開く。

7. 無作為 300 通りの最小 1.390260×10^{-2}（計算 3.2）：下限の 3.559066 倍。
8. 下回った回数 0（観察 3.3）：本稿の芯・床は破れない。
9. 床と、触れる取り方（観察 4.2）：二つが揃っている。
10. 比べた優劣か、等号の下限か（観察 4.1）：分離子・論文329・300。

結び：チェビシェフ点の最適性は、比べて分かった優劣ではなく、等号で決まっている。節の多項式の最大は、チェビシェフ点では 2^{1-n} にちょうど一致し（五つの n で比 1.000000・$n = 13$ で 2.441406×10^{-4}、$n = 21$ で 9.536743×10^{-7}）——同じ高さの山と谷が繰り返す形になるからである。等間隔の節はこれより大きく、$n = 5$ の 1.815716 倍から $n = 21$ の 245.018559 倍へ開き、無作為に取った 300 通りの節も最小で下限の 3.559066 倍、一度も下回らなかった——偶然に良い節を引くことはあっても、床を突き抜けることはない。分離子は、比べて出た優劣か、等号で決まる下限かである。既刊との位置——論文329 の席の隣に置き（あちらは同じ点の上で方法を比べた）、論文300 の規律で「比べて良い」と「それ以上良くできない」を別根として扱った。正直に言えば——最適性そのものは証明しておらず、確かめたのは等号の一致と、無作為な節が床を割らないことである。

参考文献

1. 山岸勇輝 (2026). 『三百本目の点呼 ── 同根か別根かは、判定できる』[論文300]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171914
2. 山岸勇輝 (2026). 『同じ点を使って、片方は千倍に発散し、片方は千分の一に収束する』[論文329]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22681343

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)