

「組に分ける」は二つあり、組の中を輪に並べるかで、いちばん多い組の数まで変わる

— 7個のものを組に分けるだけなら **877** 通り（ベル数）、組の中を輪に並べるなら **5040** 通り（**7!**）
で、比は **5.746864** である — 分離子は、組の中身だけを見るか、組の中の回る順まで見るか — [論文
870]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年9月

YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/870>

— *From thinking to syncing.* —

要旨

「7人を三つの組に分ける方法は何通りか」は、一つの問いに見える。本稿は、組の中に回る順を認めるかどうかで数が二つに分かれ、いちばん多い組の数まで変わることを、全部数えて確かめる。新しい定理も法則も主張しない。第一に、分ける数は二つある。組に分けるだけの数（第二種スターリング数）と、組の中を輪に並べる数（第一種スターリング数）を数え上げ、二つの漸化式と $n \leq 7$ のすべての組の数で一致させた（第2節）。第二に、合計は桁が違う。7個で、分けるだけの合計はベル数 **877**、輪に並べる合計は **7! = 5040** で、比は **5.746864** である（第2節）。第三に、これが本稿の芯である。いちばん多い組の数まで変わる。分けるだけなら **4** 組が **350** 通りでいちばん多く、輪に並べるなら **2** 組が **1764** 通りでいちばん多い（第3節）。第四に、平均の組の数も違う。無作為に一つ選ぶと、組の数の平均は分けるだけで **3.720639**、輪に並べると **2.592857** で、後者は調和数 H_7 と差 10^{-12} 未満で一致した（第3節）。第五に、輪の数は偶奇を決める。並べ替えを輪に分けたとき、7から輪の数を引いた数が偶数なら偶置換で、その個数は **5040** のちょうど半分の **2520** である（第4節）。第六に、分離子は、組の中身だけを見るか、組の中の回る順まで見るかである。回る順を認めると大きい組ほど並べ方が増え、少ない数の大きい組が有利になる（第5節）。キーワード：スターリング数、ベル数、巡回置換、調和数、偶置換。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない。二種類のスターリング数とその漸化式、合計がベル数と階乗になること、輪の数の平均が調和数になること、輪の数が並べ替えの偶奇を決めることは、いずれも既知である。証明に入らない。母関数や、組の数が大きい n でどう振る舞うかの式には入らない。大きさを一般化しない。 $n \geq 8$ は数え上げていない。実在の組分けを扱わない。班分けや座席の決め方は主題ではない。既刊との関係：論文841 は、互換への分け方は一通りに決まらないのに、偶奇だけは一通りに決まることを示した。本稿はその隣に置く。ここでは並べ替えを輪に分けた数を数え、その輪の数が偶奇を決めることを、偶置換 2520 個で確かめる。加えたのは、二つの分け方を $n \leq 7$ で数え上げて漸化式と一致させたこと、合計の比 5.746864 を測ったこと、いちばん多い組の数が 4 と 2 に分かれると測ったこと、分離子を「組の中身か、回る順か」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：番号の付いた n 個のものを、空でない k 個の組に分ける。組の並びは区別しない。組の中の順を見ない数を $S(n, k)$ （第二種スターリング数）、組の中を輪に並べた順まで区別する数を $c(n, k)$ （符号を除いた第一種スターリング数）とする。後者は、 n 個の並べ替えのうち輪がちょうど k 個のものの数でもある。

$$S(n, k) = kS(n-1, k) + S(n-1, k-1), \quad c(n, k) = (n-1)c(n-1, k) + c(n-1, k-1),$$

$$\sum_k S(n, k) = B_n, \quad \sum_k c(n, k) = n!$$

$S(n, k)$ は組の割り当て方の列をすべて作って、 $c(n, k)$ は並べ替えを全部作って輪を数え、 $n \leq 7$ のすべての k で漸化式と比べた。

問い：「 k 組に分ける」の数は、組の中の順を認めるかどうかで、どれだけ変わるのか。

2. 二つの数え方

計算 2.1： $n = 7$ で、組の数 k ごとに二つの数を数えた。

k	分けるだけ $S(7, k)$	輪に並べる $c(7, k)$	比
1	1	720	720.000000
2	63	1764	28.000000
3	301	1624	5.395349
4	350	735	2.100000
5	140	175	1.250000
6	21	21	1.000000
7	1	1	1.000000

観察 2.2

合計は桁が違う。分けるだけの合計はベル数で 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877、輪に並べる合計は階乗で 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040 になり、 $n = 7$ の比は 5.746864 である。数え上げた数は、 $n \leq 7$ のすべての k で二つの漸化式と一致した。

観察 2.3

組が小さいと、二つは同じになる。 $k = 6$ と $k = 7$ では比が 1.000000 である。組の大きさが 1 か 2 なら、輪に並べる順は一通りしかないからである。差が開くのは、大きい組ができる k の小さい側である。

3. いちばん多い組の数

計算 3.1 : $n = 7$ で、いちばん多い組の数と、無作為に一つ選んだときの組の数の平均を出した。

量	分けるだけ	輪に並べる
いちばん多い組の数	4 (350 通り)	2 (1764 通り)
組の数の平均	3.720639	2.592857

観察 3.2

これが本稿の芯である。いちばん多い組の数まで変わる。分けるだけなら 4 組がいちばん多いのに、輪に並べると 2 組がいちばん多く、平均の比は 1.434957 である。大きさ m の組は輪に並べると $(m-1)!$ 通りに増えるので、少ない数の大きい組をもつ分け方が数で勝つ。輪に並べる平均 2.592857 は、調和数 $H_7 = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{7}$ と差 10^{-12} 未満で一致した。

4. 輪の数と偶奇

計算 4.1 : 7 個の並べ替えを輪に分け、7 から輪の数を引いた数が偶数のもの（偶置換）を数えた。

観察 4.2

輪の数は偶奇を決める。偶置換は 2520 個で、5040 のちょうど半分である。長さ m の輪は $m-1$ 個の互換で書けるので、互換の数の偶奇は 7 から輪の数を引いた数の偶奇に等しい。互換への分け方が一通りに決まらなくても、輪の数は一通りに決まる。

5. 分離子

観察 5.1

分離子は、組の中身だけを見るか、組の中の回る順まで見るかである。中身だけを見れば、組の数はほどほどに多い 4 が有利になる。回る順まで見れば、大きい組の中の並べ方が数を押し上げ、組の数の少ない 2 が有利になる。同じ「7 個を組に分ける」が、何を区別するかでいちばん多い形を変える。

観察 5.2

論文 841 の隣に置く。841 は、互換への分け方は一通りに決まらないのに、偶奇だけは一通りに決まることを示した。ここでは並べ替えを輪に分けた数を数え、その輪の数から偶奇が決まり、偶置換がちょうど半分になることを確かめた。

観察 5.3

言わないこと。母関数や漸近式の証明も、 $n \geq 8$ の数え上げも、実在の班分けも扱わない。示したのは、組の中の回る順を認めるかどうかで、数もいちばん多い組の数も変わるということである。

6. 点呼と結び

1. $S(n, k)$ と $c(n, k)$ (第1節) : 分けるだけと、輪に並べる。
2. 漸化式と数え上げが一致 (観察 2.2) : $n \leq 7$ 。
3. 合計 **877** と **5040** (観察 2.2) : ベル数と階乗。
4. 比 **5.746864** (観察 2.2) : $n = 7$ 。
5. 二組で **28** 倍 (計算 2.1) : **63** と **1764**。
6. $k = 6, 7$ で同じ (観察 2.3) : 小さい組は一通り。
7. いちばん多いのは **4** 組と **2** 組 (計算 3.1) : 本稿の芯。
8. 平均 **3.720639** と **2.592857** (計算 3.1) : 後者は調和数。
9. 偶置換 **2520** (観察 4.2) : ちょうど半分。
10. 中身か、回る順か (観察 5.1) : 分離子・論文**841**。

結び : 「いくつかの組に分ける」は二つあり、組の中を輪に並べるかどうかで、いちばん多い組の数まで変わる。7 個を組に分けるだけなら **877** 通り、組の中を輪に並べるなら **5040** 通りで、比は **5.746864** である。大きさ m の組は輪に並べると $(m-1)!$ 通りに増え、その増え方が大きい組ほど大きいからである。そのためいちばん多い組の数は、分けるだけなら **4** 組、輪に並べるなら **2** 組になり、平均は **3.720639** と **2.592857** に分かれる。輪の数は並べ替えの偶奇を決め、偶置換はちょうど半分の **2520** 個である。既刊との位置 : 論文**841** の「偶奇だけは一通りに決まる」の隣に、輪の数という形でその偶奇を数え、輪を認めるかどうかで分け方の数そのものが変わることを置いた。正直に言えば、数え上げたのは $n \leq 7$ までで、漸化式も調和数との一致も既知である。

参考文献

1. Graham, R. L., Knuth, D. E., & Patashnik, O. (1994). *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science* (2nd ed.). Addison-Wesley.
2. Stanley, R. P. (2011). *Enumerative Combinatorics, Volume 1* (2nd ed.). Cambridge University Press.

3. 山岸勇輝 (2026). 『手順は一通りに決まらないのに、偶奇だけは一通りに決まる』 [論文841]. YOI:
<https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/841>

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)