偏光を閉じた道で一周させると、位相は囲んだ立体角の半分だけ動く

— 半球を囲めば位相は π で符号が反転し、量子ビットのベリー位相と同じ半分である — 分離子は、強度だけを測るか、参照と干渉させて位相を測るか — [論文906]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

偏光子を何枚か通して元の偏光に戻せば、光は元に戻った、と思いやすい。本稿は、偏光の状態をポアンカレ球の点として追い、閉じた道を一周したあとに残る位相を、囲んだ立体角と比べる。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、偏光の状態への写像はホップ写像である——二成分の複素ベクトルから作ったストークス・ベクトルは 2000 個すべてで単位球に乗り、全体の位相を掛けても 10^{-15} の桁で動かない（第2節）。 第二に、これが本稿の芯である。閉じた道の位相は、囲んだ立体角の半分である——偏光子三枚で $A \to B \to C \to A$ と戻したときの位相 $\arg\langle A|C\rangle\langle C|B\rangle\langle B|A\rangle$ は、五つの無作為の三角形で囲んだ立体角の $-\Omega/2$ と 10^{-9} 以内で一致した（例：$\Omega = -5.580641$ で位相 $+2.790320$）。逆回りは $+\Omega/2$ で、$-(4\pi - \Omega)/2$ と 2π を法として同じである（第2節）。 第三に、半球を囲めば、符号が反転する——直線偏光の向きを N 段で半回転させて戻す（赤道を一周・$\Omega = 2\pi$）と、位相は $N = 3$ から 384 のすべてで π である（第3節）。 第四に、振幅は戻るのに、符号は戻らない——残る振幅は $\cos^{N}(\pi/N)$ で、$N = 3$ の 0.125000 から $N = 384$ の $\mathbf{0.987231}$ まで 1 に近づくのに、参照光と同位相で重ねた強度は $N = 384$ で $\mathbf{0.000041}$ に打ち消す（第3節）。 第五に、段を細かくすると、どの道でも半分に収束する——円偏光の近くの角半径 10 度の円（$\Omega = 0.095456$）を N 段で一周すると、位相は $N = 6$ の -0.039621 から $N = 1536$ の $\mathbf{-0.047728}$ へ、$-\Omega/2$ に 1.30×10^{-7} まで近づく（第4節）。 第六に、分離子は、強度だけを測るか、参照と干渉させて位相を測るかである——強度だけなら N を増やすほど元に戻り、参照と重ねれば半球の位相 π が暗さとして残る。式はスピン $1/2$ の量子ビットと同じ二成分ベクトルのもので、論文68 の $-\Omega/2$ と同根である（第5節）。 キーワード：偏光、ポアンカレ球、幾何学的位相、立体角、ホップ写像、干渉。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——偏光の閉じた道に立体角の半分の位相が付くこと（パンチャラトナム 1956）、それがベリー位相（1984）と同じであること（ベリー 1987）、偏光の状態空間がホップ束であることは、いずれも既知である。実在の光学系を主張しない——偏光子の枚数・角度・振幅は模型の値で、どの装置の値でもない。部分偏光と損失を入れない——完全偏光の射影だけを扱い、部分偏光、吸収の違い、非断熱の効果は入れない。位相の由来に入らない——位相がホップ束のホロノミーであることの説明は論文 68 の側で、ここでは光での数だけを出す。既刊との関係：論文68 は、量子ビットがホップ束であり、ベリー位相がその繊維のホロノミー $-\Omega/2$ として測れることを示した——ここで使う二成分のジョーンズ・ベクトルはスピン $1/2$ のスピノルと同じ形で、同じ関数から同じ位相が出る。数の一致ではなく式が同じなので、論文300 の意味で同根と書く。論文207 は、偏光を書く道具が三つあり、ジョーンズ・ベクトルは偏光していない光を書けないことを示した——ここではその三つ目、ポアンカレ球の上で閉じた道を追う。論文08 は、ホップ束（S^3 から S^2 への写像で、繊維は S^1）で底空間の面積と繊維の周長の積が全空間の体積になることを示した——ここでは、その底空間がポアンカレ球、繊維が偏光の位相である。論文18 は、2π の三つの別根を分け、その一つを半球の立体角とした——ここでは半球の立体角 2π が、位相の π になる。加えたのは、偏光子の射影で作った閉じた道の位相を無作為の三角形で $-\Omega/2$ と突き合わせたこと、半球の道で振幅が戻っても符号が戻らないことを数で示したこと、段を細かくしたときの収束を測ったこと、分離子を「強度か、干渉か」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：偏光の状態を、ポアンカレ球の極角 θ・方位 φ に対応する正規化ジョーンズ・ベクトル $|\psi\rangle = (\cos\frac{\theta}{2}, e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2})$ で表す。ストークス・ベクトルは $s = (2\mathrm{Re}\bar{\psi}_0\psi_1, 2\mathrm{Im}\bar{\psi}_0\psi_1, |\psi_0|^2 - |\psi_1|^2)$ で、これがホップ写像である。偏光子は状態への射影で、$A \to B \to \cdots \to A$ と通したあとに残る振幅は、隣り合う状態の内積の積である。

$$\mathcal{A} = \langle A|Z\rangle \cdots \langle C|B\rangle\langle B|A\rangle, \qquad \gamma = \arg \mathcal{A}$$

囲んだ立体角 Ω は、三角形では $\tan(\Omega/2) = a\cdot(b\times c)/(1 + a\cdot b + b\cdot c + c\cdot a)$ と、三つの内角の和から π を引く二通りで出した。参照光（振幅 1・位相 0）と重ねた強度は $|1+\mathcal{A}|^2/4$ とした。

問い：偏光子を通して元の偏光に戻したとき、光は元に戻っているか。

2. ホップ写像と、三角形の道

計算 2.1：無作為の 2000 個の状態でホップ写像を確かめ、無作為の三角形五つで閉じた道の位相と立体角を出した。

三角形	位相 γ	立体角 Ω（二通り）	$-\Omega/2$	逆回りの位相
1	$+2.790320$	-5.580641（超過 5.580641）	$+2.790320$	-2.790320
2	$+1.379210$	-2.758419（超過 2.758419）	$+1.379210$	-1.379210
3	-0.049433	$+0.098867$（超過 0.098867）	-0.049433	$+0.049433$
4	$+2.534184$	-5.068369（超過 5.068369）	$+2.534184$	-2.534184
5	$+1.364392$	-2.728783（超過 2.728783）	$+1.364392$	-1.364392

> **観察 2.2**
>
> これが本稿の芯である。閉じた道の位相は、囲んだ立体角の半分である。ストークス・ベクトルは 2000 個すべてで単位球に乗り、全体の位相に依らず、(θ, φ) の点と一致した——三角形の道の位相は五つとも $-\Omega/2$ と 10^{-9} 以内で、向きつきの立体角と内角の超過も一致した。逆回りの位相 $+\Omega/2$ は $-(4\pi - \Omega)/2$ と 2π を法として同じで、全球 4π は位相の一周 2π に対応する。

3. 半球の道

計算 3.1：直線偏光の向きを N 段で半回転させて元に戻す（ポアンカレ球の赤道を一周・$\Omega = 2\pi$）道の位相と振幅を出した。

N	位相	残る振幅 $\cos^N(\pi/N)$	参照と同位相で重ねた強度
3	π	0.125000	0.191406
6	π	0.421875	0.083557
12	π	0.659668	0.028956
24	π	0.813665	0.008680
96	π	0.949886	0.000628
384	π	0.987231	0.000041

> **観察 3.2**
>
> 振幅は戻るのに、符号は戻らない。位相は N に依らず π（半球 2π の半分）で、残る振幅は段を細かくするほど 1 に近づく——強度だけを測れば $N = 384$ で 0.987231 の振幅が戻ってくるが、参照光と重ねると 0.000041 に打ち消す。元に戻ったのは状態であって、位相ではない。

4. 小さい道

計算 4.1：円偏光の近くの角半径 10 度の円（$\Omega = 0.095456$）を N 段で一周した位相を出した。

N	位相	$-\Omega/2$ との差
6	-0.039621	8.11×10^{-3}
24	-0.047197	5.31×10^{-4}
96	-0.047695	3.33×10^{-5}
384	-0.047726	2.08×10^{-6}
1536	-0.047728	1.30×10^{-7}

> **観察 4.2**
>
> 段を細かくすると、どの道でも半分に収束する。射影の段数を 4 倍にするごとに差はおよそ一桁ずつ縮み、$N = 1536$ で $-\Omega/2 = -0.047728$ に 1.30×10^{-7} まで近づく——半球の位相 π とこの小さい円の位相の比 0.015192 は、立体角の比 0.015192 に等しい。

5. 分離子

> **観察 5.1**
>
> 分離子は、強度だけを測るか、参照と干渉させて位相を測るかである。強度だけを測れば、段を細かくした道は光をほとんど失わずに元の偏光に戻す——参照と重ねれば、囲んだ立体角の半分が位相として残り、半球なら暗さとして見える。

観察 5.2

論文68 と同根である。論文68 は量子ビットがホップ束であり、ベリー位相がその繊維のホロノミー $-\Omega/2$ として測れることを示した——ここで使ったジョーンズ・ベクトル $(\cos\frac{\theta}{2}, e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2})$ はスピン $1/2$ のスピノルと同じ形で、同じ関数から同じ位相が出る。数の一致ではなく式が同じなので、論文300 の意味で同根と書く。論文08 のホップ束の底空間がここではポアンカレ球、繊維が偏光の位相であり、論文207 の三つ目の道具の上で道を追った。論文18 が半球の立体角とした 2π は、ここでは位相の π である。

観察 5.3

言わないこと。実在の光学系の値、部分偏光、損失、非断熱の効果、位相がホロノミーである由来は扱わない——示したのは、光の偏光でも閉じた道の位相が囲んだ立体角の半分になり、半球で符号が反転することである。

6. 点呼と結び

1. $\gamma = \arg\langle A|Z\rangle\cdots\langle B|A\rangle$（第1節）：射影の道の位相。
2. ホップ写像・2000 個で単位球（計算 2.1）：全体の位相に依らない。
3. 三角形 1 で $+2.790320$（計算 2.1）：本稿の芯・$-\Omega/2$。
4. 逆回りで $+\Omega/2$（観察 2.2）：全球 4π ↔ 位相 2π。
5. 半球の道で位相 π（計算 3.1）：$N = 3$ から 384 まで。
6. 振幅 0.987231（計算 3.1）：$N = 384$・ほぼ戻る。
7. 重ねた強度 0.000041（観察 3.2）：符号は戻らない。
8. 小さい円で -0.047728（計算 4.1）：$-\Omega/2$ に収束。
9. 位相の比 0.015192 ＝立体角の比（観察 4.2）：半分は道に依らない。
10. 強度か、干渉か（観察 5.1）：分離子・論文68・207・08・18。

結び：偏光を閉じた道で一周させると位相は囲んだ立体角の半分だけ動き、半球を囲めば符号が反転する——量子ビットのベリー位相と同じ半分である。偏光子の射影で作った三角形の道の位相は五つとも $-\Omega/2$ と一致し、直線偏光の向きを半回転させて戻す道では位相が N に依らず π だった——残る振幅は $N = 384$ で 0.987231 まで戻るのに、参照光と重ねた強度は 0.000041 に打ち消す。小さい円でも段を細かくすれば $-\Omega/2$ に収束し、逆回りは $+\Omega/2$ で、全球 4π が位相の 2π に対応する——元に戻ったのは状態で、位相は囲んだ空の半

分を覚えている。既刊との位置——論文68 の量子ビットと同じ式（同根）を光で数え、論文08 のホップ束と論文207 のポアンカレ球の上に置いた。正直に言えば——装置の値は模型で、部分偏光も損失も入れず、位相の由来は論文68 に任せた。

参考文献

1. 山岸勇輝 (2026). 『Hopf 束としての量子ビット』[論文68]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21642238
2. 山岸勇輝 (2026). 『「偏光」を書く道具は三つあり、一つは「偏光していない光」を書けない』[論文207]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22110902
3. 山岸勇輝 (2026). 『n=3唯一性定理とホップファイブレーションに基づく 4次元ポアンカレ予想とエキゾチック構造の構造的解釈』[論文08]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404419
4. 山岸勇輝 (2026). 『山岸運動エネルギー方程式』[論文18]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21430706
5. 山岸勇輝 (2026). 『三百本目の点呼』[論文300]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171914
6. Pancharatnam, S. (1956). Generalized theory of interference, and its applications. *Proceedings of the Indian Academy of Sciences, Section A*.
7. Berry, M. V. (1984). Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proceedings of the Royal Society of London A*.
8. Berry, M. V. (1987). The adiabatic phase and Pancharatnam's phase for polarized light. *Journal of Modern Optics*.

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)