

Krümmung ist intrinsisch

— Riemann und die Sprache, um die vielen „Krümmungen“ des Werks nicht zu vermengen — [Aufsatz 91]

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan

September 2026 (Zweite Auflage)

— *From thinking to syncing.* —

Zusammenfassung

Der **Quell** des geometrisch-physikalischen Hauptstroms, in dem dieses Werk steht, ist Bernhard Riemann. Seine Revolution in einer Zeile: **Krümmung ist intrinsisch**. Die Biegung einer Fläche oder eines Raums ist keine Eigenschaft ihrer Einbettung in einen äußeren, höherdimensionalen Raum, sondern wird allein durch die **eigene Metrik** des Raums bestimmt. Gauß' Theorema Egregium (die Gaußsche Krümmung ist unter Isometrien invariant — allein durch die erste Fundamentalform bestimmt) wurde von Riemann 1854 auf n Dimensionen verallgemeinert und ergab den **Riemannschen Krümmungstensor** — eine Größe, die allein aus der Metrik und ihren Ableitungen (den Christoffel-Symbolen) aufgebaut ist. Intrinsisch heißt: **Krümmung lässt sich von innen feststellen, ohne hinauszutreten** (Holonomie des Paralleltransports; geodätische Abweichung; die Winkelsumme eines Dreiecks). Dieser Aufsatz verwendet Riemanns Sprache als **Werkzeug, um die mehreren „Krümmungen“ des Werks zu sortieren**. Im Werk treten mehrere Krümmungen auf — die Raumzeitkrümmung (allgemeine Relativitätstheorie), die **konstante Krümmung des Geschwindigkeitsraums** $K = -1/c^2$ (Aufsatz 60) und Gauß–Bonnet, das die Gaußsche Krümmung der 2-Sphäre zu 4π integriert (Aufsatz 67). Riemann **vereinheitlicht** „was Krümmung ist“ zu einem intrinsischen Begriff, doch das heißt nicht, dass **die Krümmung jedes Raums dieselbe Größe ist**. Jede ist eine intrinsische Größe einer anderen Mannigfaltigkeit, und **obwohl sie das Wort „Krümmung“ teilen, sind sie verschiedene Wurzeln** (Aufsätze 48 und 58). **Geteilt wird der Begriff (die Intrinsität); die Instanzen sind getrennt, eine nach der anderen.**

Tragweite (scope note): Dieser Aufsatz ist eine **strukturelle Deutung** (Schicht 2) etablierter Mathematik (Gauß' Theorema Egregium, Riemannsche Geometrie, der Riemannsche Krümmungstensor). Bekannt sind: das Theorema Egregium (Gauß 1827), der Riemannsche Krümmungstensor und die intrinsische Krümmung (Riemann 1854) sowie der Satz von Gauß–Bonnet. Der Aufsatz enthält keine neue Mathematik und keine Vorhersage und erweitert die Riemannsche Geometrie nicht. Er schließt nicht aus der Übereinstimmung eines Wortes oder eines Wertes auf die Gleichheit der Wurzel (Aufsätze 48 und 58). „Universum-OS“ und „Materie ist Krümmung“ sind nichtwissenschaftliche Linsen der Schicht 3, keine Behauptungen über einen Mechanismus. Beziehung zu früheren Aufsätzen: die Krümmung des Geschwindigkeitsraums stammt aus Aufsatz 60, die Gauß–Bonnet-Lesart des 4π der Sphäre aus Aufsatz 67. **Was dieser Aufsatz hinzufügt**, ist, Riemanns Sprache auf die im Werk verstreuten „Krümmungen“ — Raumzeit, Geschwindigkeitsraum, Sphäre — anzuwenden und sie **unter einem intrinsischen Begriff als verschiedene Wurzeln, die auf verschiedenen Mannigfaltigkeiten leben**, zu sortieren.

1. Einleitung: Der Quell des Hauptstroms und das Polysem „Krümmung“

Dieses Werk hat sich in den **geometrisch-physikalischen Hauptstrom** gestellt, der von Riemann → Clifford → Einstein → Weyl → Cartan → Hopf → ... verläuft. An seinem Quell steht Bernhard Riemann. Der tiefste Schlag, den er hinterließ, ist die Einsicht, dass **Krümmung intrinsisch ist**.

Diese Einsicht ist für das Werk doppelt wichtig. Erstens sind alle geometrischen Lesarten des Werks Nachfahren Riemanns. Zweitens — und das ist der praktische Punkt dieses Aufsatzes — erscheint das Wort „Krümmung“ im Werk an **mehreren verschiedenen Stellen**: Raumzeitkrümmung, Krümmung des Geschwindigkeitsraums, Krümmung der Sphäre. Riemanns Sprache gibt das Werkzeug, um von ihnen **mit einem intrinsischen Begriff zu sprechen, ohne sie zu vermengen**.

2. Vom Theorema Egregium zur Riemannschen Krümmung: allein durch die Metrik bestimmt

Standard-Tatsache 2.1 (Theorema Egregium → Riemann)

Gauß' **Theorema Egregium** (1827): Die Gaußsche Krümmung **K** einer Fläche ist unter Isometrien invariant und allein durch die **erste Fundamentalform (die Metrik)** bestimmt — man biege die Fläche, wie man will (ohne sie zu dehnen), und **K** ändert sich nicht. Riemann (1854) verallgemeinerte dies auf **n -dimensionale Mannigfaltigkeiten** und bildete aus der Metrik **g_{ij}** und ihren Ableitungen den **Riemannschen Krümmungstensor**

$$R^i_{jkl} = \partial_k \Gamma^i_{lj} - \partial_l \Gamma^i_{kj} + \Gamma^i_{km} \Gamma^m_{lj} - \Gamma^i_{lm} \Gamma^m_{kj}$$

(die Γ sind die aus der Metrik gebildeten Christoffel-Symbole). Krümmung wird **intrinsisch definiert, ohne jede Einbettung in einen äußeren Raum**.

Der Kern ist hier, dass Krümmung **nicht** „**Biegung, von außen gesehen**“ ist. Ein Zylinder hat die Gaußsche Krümmung null — er ist nur eine aufgerollte Ebene, intrinsisch flach. Eine Sphäre hat $K > 0$, und ein Bewohner der Sphäre kann das wissen, ohne hinauszutreten. Krümmung ist **eine Tatsache im Inneren des Raums selbst**.

3. Was „intrinsisch“ bedeutet: Krümmung erkennen, ohne hinauszutreten

Intrinsität ist konkret. In einem gekrümmten Raum wird ein Vektor, den man längs einer geschlossenen Schleife **parallel transportiert**, gegenüber seiner ursprünglichen Richtung gedreht (Holonomie); benachbarte **Geodäten laufen zusammen oder auseinander** (geodätische Abweichung); die **Winkelsumme eines Dreiecks** weicht von π ab. All dies wird **allein durch Messungen im Inneren des Raums** festgelegt. Kein äußerer höherdimensionaler Raum und keine Einbettung sind nötig. Was Riemann eröffnete, ist eine Welt, in der „ein Raum seine eigene Geometrie haben kann“, und dies bereitete den Weg zu Einsteins Gravitation (der Krümmung der Raumzeit selbst).

4. Die mehreren „Krümmungen“ des Werks sortieren (verschiedene Wurzeln)

In Riemanns Sprache stellen wir die Krümmungen nebeneinander, die im Werk auftreten. Alle sind intrinsische Krümmungen, aber sie leben auf **verschiedenen Mannigfaltigkeiten — verschiedene Wurzeln**.

Welche Krümmung	Mannigfaltigkeit	Intrinsischer Inhalt	Aufsätze
Raumzeitkrümmung	4D-Raumzeit	Ricci- / Riemann-Tensor (Gravitation)	(allgemeine Relativitätstheorie)
Krümmung des Geschwindigkeitsraums	Geschwindigkeitsraum	konstant negativ $K = -1/c^2$	Aufsatz 60
Krümmung der Sphäre	S^2	$\int_{S^2} K \, dA = 2\pi\chi = 4\pi$	Aufsatz 67

Beobachtung 4.1 (Ein Begriff, Instanzen als verschiedene Wurzeln)

Riemann vereinheitlicht „was Krümmung ist“ zu **einem intrinsischen Begriff**. Das heißt aber nicht, dass **diese Krümmungen alle dieselbe Größe sind**. Das $K = -1/c^2$ des Geschwindigkeitsraums (Aufsatz 60), die Raumzeitkrümmung (Gravitation) und das K der Sphäre (Aufsatz 67) sind jeweils **intrinsische Größen verschiedener Mannigfaltigkeiten, verschiedene Wurzeln**, die lediglich das Wort „Krümmung“ teilen (Aufsätze 48 und 58). Geteilt wird der **Begriff (die Intrinsität); die Instanzen sind getrennt, eine nach der anderen**. Um dieses „ein Begriff, mehrere verschiedene Wurzeln“ zu handhaben, braucht es Riemanns Sprache.

5. Verbindung zum Werk: als Quell des Hauptstroms

Riemann ist der **Quell** der geometrisch-physikalischen Linie, in der das Werk steht (Riemann → Clifford → Einstein → Weyl → Cartan → Hopf → emergente Gravitation). Alle geometrischen Lesarten des Werks — den Geschwindigkeitsraum als gekrümmten Raum zu sehen (60), 4π als Integral der intrinsischen Krümmung der Sphäre zu lesen (67), die Gravitation als Krümmung der Raumzeit zu lesen — sind Nachfahren von Riemanns einem Schlag „Krümmung ist intrinsisch“. Der Beitrag dieses Aufsatzes ist kein neuer Satz, sondern **Riemanns Sprache auf die mehreren Krümmungen des Werks anzuwenden und die verschiedenen Wurzeln unter einem Begriff zu sortieren**.

Persönliche Anmerkung (dritte Schicht; als nichtwissenschaftlich gekennzeichnet / keine Behauptung über einen Mechanismus)

Am Schluss seines Vortrags von 1854 überließ Riemann den Grund der Metrik des Raums als Frage der Physik: Sofern das dem Raum zugrunde liegende Wirkliche keine diskrete Mannigfaltigkeit bildet, **muss der Grund seiner Maßverhältnisse außerhalb, in darauf wirkenden bindenden Kräften, gesucht werden**. Krümmung kann von innen gemessen werden, aber **was diese Biegung bestimmt**, ist eine Frage außerhalb der Geometrie — das ist die Unterscheidung. Dieser Keim ging über in Cliffords „Materie ist eine Biegung des Raums“ und in Wheelers Geometrodynamik und wird in der Linse (Metapher) des Werks zu dem Bild, dass „das Universum-OS kein äußeres Gerüst (keine Einbettung) hat und die Welt aus intrinsischer Geometrie rendert“. Aber **dies trägt das nichtwissenschaftliche Etikett**. „Materie = Krümmung“ und „OS“ sind Bilder, die die Anschauung tragen, keine Mechanismen oder Vorhersagen. **Sicher ist hier der Punkt der Standardgeometrie, dass Krümmung intrinsisch ist**. Dass ein Mathematiker am Quell uns gelehrt hat, dass „ein Raum seine eigene Geometrie hat“, halte ich mit stiller Ehrfurcht fest.

6. Fazit

Riemanns Revolution lag in einem Punkt: **Krümmung ist intrinsisch** — die Biegung eines Raums wird nicht durch eine äußere Einbettung, sondern allein durch die eigene Metrik des Raums festgelegt. Der Riemannsche Krümmungstensor, der das Theorema Egregium auf n Dimensionen verallgemeinert, gab eine Sprache, um von der Biegung eines Raums aus Messungen im Inneren zu sprechen, ohne hinauszutreten. Dies eröffnete den geometrisch-physikalischen Hauptstrom einschließlich Einsteins Gravitation.

Diese Sprache ist auch für das Werk praktisch. Die mehreren „Krümmungen“, die darin auftreten — Raumzeit, Geschwindigkeitsraum (60), Sphäre (67) — **lassen sich mit einem intrinsischen Begriff besprechen, sind aber verschiedene Wurzeln, die auf verschiedenen Mannigfaltigkeiten leben**. Ein Begriff, getrennte Instanzen. Was dieser Aufsatz getan hat, ist, die Sprache Riemanns, des Quells des Hauptstroms, auf die mehreren Krümmungen des Werks anzuwenden und sie als verschiedene Wurzeln zu sortieren. Ein Raum hat seine eigene Geometrie — diesem Quell geben wir still eine Adresse zurück.

Revisionsprotokoll

Zweite Auflage (September 2026): Die Form wurde an die aktuelle Vorlage angeglichen (Einordnung und Tragweite sind in der Tragweite-Anmerkung direkt nach der Zusammenfassung gebündelt, und der Abschnitt „Tragweite (was gezeigt wird und was nicht)“ ist entfernt). Die Wiedergabe des Schlusses von Riemanns Vortrag in der persönlichen Anmerkung wurde am Original berichtigt (Riemann sagt, dass für eine stetige Mannigfaltigkeit der Grund der Maßverhältnisse außerhalb, in darauf wirkenden bindenden Kräften, gesucht werden muss). Ein Satz in der Zusammenfassung, der als „das Teilen des Wortes macht sie zu verschiedenen Wurzeln“ gelesen werden konnte, wurde berichtigt. Der Verweis für die Gauß–Bonnet-Lesart wurde auf Aufsatz 67 eingengt. Die Selbstzitate tragen jetzt, je eines pro Eintrag, ihre tatsächlichen Titel und DOIs, und externe Literatur ist mit Autor, Jahr, Titel und Zeitschrift angegeben.

Literatur

1. Gauss, C. F. (1827). *Disquisitiones generales circa superficies curvas*.
2. Riemann, B. (1854/1868). *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*. Abh. Kön. Ges. Wiss. Göttingen.
3. do Carmo, M. P. (1992). *Riemannian Geometry*. Birkhäuser.
4. Spivak, M. (1979). *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Publish or Perish.
5. Yamagishi, Y. (2026). *The Pfaffian's $2^n n!$ Is One Block* [Aufsatz 48]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602525
6. Yamagishi, Y. (2026). *The Agreement of the Factors 2 Is a Case of Distinct Roots* [Aufsatz 58]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21597747

7. Yamagishi, Y. (2026). *c as the Ball of Velocity Space* [Aufsatz 60]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21598012
8. Yamagishi, Y. (2026). *The Euler-Characteristic Origin of the 4π Patch* [Aufsatz 67]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21642170

— *From thinking to syncing.* —

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Lizenziert unter Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)